

東京大学 学生員 堀 宗朗

東京大学 学生員 土橋 浩

東京大学 正員 長谷川 彰夫

東京大学 正員 西野 文雄

1. まえがき 近年、最適設計の手法として“総重量一定の下で適用可能荷重を最大”にする最大荷重設計が提案され、従来の設計手法である“適用荷重一定の下で総重量を最小”にする最小重量設計との等価性や計算効率の優劣について研究がなされてきた¹⁾。ここでは、最大荷重設計を最小重量設計に数学的変換を施したものと位置付ける事によって、両設計の等価性と計算効率の優劣について十分な吟味を加える。

2. 数学的変換 n 次元ベクトル X の実関数、 $F(X)$ 、 $g_i(X)$ 、 $h_j(X)$ を用いて、1次元変数 α に対し、次の最適問題 $P0(\alpha)$ を考える。

$P0(\alpha)$: $\alpha - g_i \leq 0$, $h_j \leq 0$ のもとで、 F を最小化 ($i=1 \dots m$, $j=1 \dots k$)
 $G(X) = \min [g_i(X) \mid i=1 \dots m]$, $H(X) = \max [h_j(X) \mid j=1 \dots k]$ として X の実関数 G と H を定義する事で、次の3つの最適問題を定義できる。

$P1(\alpha)$: $\alpha - G \leq 0$, $H \leq 0$ のもとで、 F を最小化

$P2(\beta)$: $F - \beta \leq 0$, $H \leq 0$ のもとで、 G を最大化

$P3(\beta)$: $F(X) = \beta$ より、 X の次元を一つ減らした X' に対して、 $H(X') \leq 0$ のもとで、 G を最大化

この $P3$ と $P0$ は Fig. 1で示すように3つの数学的変換によって関係付けられる。 G と H の定義から明らかのように、 $P0$ と $P1$ は同一の最適解をもつ(以下これを等価と呼ぶ)。次に、 $P1$ と $P2$ の間には以下の等号値性定理が

成立する。

定理: X^* に対し、 $\alpha^* = G(X^*)$, $\beta^* = F(X^*)$

とする。実関数 L_α を

$$L_\alpha(X, \lambda, \mu) \quad \lambda > 0$$

$$= F + \lambda(\alpha - G) + \mu H \quad \mu \geq 0$$

と定義した時、 $\lambda^* > 0$, $\mu^* \geq 0$ が存在して、

$$\min [L_{\alpha^*}(X, \lambda^*, \mu^*) \mid X]$$

$$= L_{\alpha^*}(X^*, \lambda^*, \mu^*)$$

$$= \max [L_{\alpha^*}(X^*, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu]$$

を満足するならば、 $P1(\alpha^*)$ と $P2(\beta^*)$ は等価である。

この定理は、鞍点定理を用いる事で容易に証明できる。また、 $P1(\alpha^*)$ とその最適解 X^* によって定義される $P1(\alpha^*)$ は等価である事、 $P2(\beta^*)$ と $P3(\beta^*)$ は等価である事から、 $P0$ と $P3$ が等価であるための十分条件は、上記の等価性定理の仮定と同一である。

3. 最大荷重設計の位置付け 最小重量設計は、幾何変数 X を変数として、適用荷重 P に関する設計事項 i ($i=1 \dots m$) に対して、 $A_i(X) \times P \leq C_i(X)$ ($A_i \times P$ は構造物の挙動、 C_i は制限値を意味する)、形状に関する設計事項 j ($j=1 \dots k$) に対して、 $S_j(X) \leq 0$ という制約条件の下で、構造の総重量を表す $W(X)$ を最小にするものである。 g_i を C_i/A_i 、 S_j を h_j とすれば、最小重量設計は前節の $P0$ に対応する。したがって、 $P_{\min}(X) = \min [C_i/A_i \mid i=1 \dots m]$, $S_{\max}(X) = \max [S_j \mid j=1 \dots k]$ とすれば、 $P3$ に対応して、最大荷重設計が定義できる。すなわち

最小重量設計: $A_i \times P \leq C_i$, $S_j \leq 0$ のもとで、 W を最小化 (MWDと略す)

最大荷重設計: $W = W$ より、 X の次元を1つ減らした X' に対して、 $S_{\max} \leq 0$ のもとで、 $P_{\min}$ を最大化 (MLDと略す)

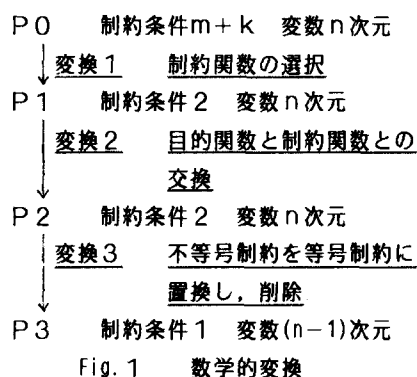


Fig. 1 数学的変換

構造工学で用いる関数は一般に偏導関数が連続である事から、MWDとMLDの等価性十分条件を満足する λ^* と μ^* が存在する事は数学的に証明される。したがって、MLDはMWDに変換1から3を施した等価な最適設計と考えられるから、両設計の計算効率の優劣をその3つの数学的変換を通して検討する事ができる。数学的な立場から効率性を扱うため、前節のP0からP3に対し最適性の1次の必要条件であるKuhn-Tucker条件を考えてみると、それは各勾配が存在するという仮定の下で以下ようになる。

P0: $\nabla F - \sum_i \xi_i \nabla g_i + \sum_j \eta_j \nabla h_j = 0$

P1: $\nabla F - \xi \nabla G + \eta \nabla H = 0$

P2: $-\nabla G + \xi \nabla F + \eta \nabla H = 0$

P3: $-\nabla G - \nabla F \times (dF/dy)^{-1} (dG/dy) + \eta \nabla H = 0$

ξ, η ; 非負の定数

y ; 消去された変数

∇ ; X による勾配

∇' ; X' による勾配

変換1によって、Khun-Tucker条件はきわめて簡単になる事、変換3によって、Khun-Tucker定数 ξ が定まる事という2つの点で効率性が改善される事がわかる。しかしながら、 G の定義から $\nabla G = 0$ となる点が多数存在する事は予想されるので、P1とP2を比較すれば明らかに、P2及びP3には局所的な最適解がP0、P1に比べ多数発生する事が考えられ、効率性を阻害する可能性がある。また計算機のプログラムでは微分を差分でとるため、 G と H の微分のとれない点でも差分で近似するが、そのような点では G と H の差分は安定せず効率性の障害となりうる。以上から、MLDはMWDに比べ変換1と変換3を受ける事で計算効率が改善されるが、変換2によって阻害される事もあると考えられる。

4. 計算効率に関する数値実験 Fig. 2に示す不静定ばりについて、断面積 $X_1 \sim X_5$ の最適化を行う。曲げモーメント、せん断力、たわみに対して適用荷重に関する設計事項19と形状に関する設計事項10を設定し、MWD、MLDを行う。但し、断面2次モーメント、断面係数等は X_i の関数として、同一の収束判定条件の下で、相対的に同一と考えられる初期値を X_i に与えている。結果はTable 1に示す。ここに、C.T.は計算時間、MWDとP1ではWが最適値であり、MLDとP2ではPが最適値である。前節で懸念された変換2による効率性の阻害を調べるため、最適解は5個の設計事項がactiveになる領域においた。しかし、MLDはMWDと同一の最適解に到達しており、逆にP1とP2の計算時間を比較すれば明らかに、変換2は計算効率を改善しているといえる。変換1と変換3については、計算時間が短縮されている事から、予想通り計算効率を改善している。以上から、MLDはMWDに比べ圧倒的に計算時間が短くなっており、きわめて大幅に効率性が改善された事がわかる。さらに L と λ の数値を変えて実験を行ったところ、同様な結果が得られ、MLDが効率的である事がこの不静定ばりについては確認された。

5. 結語 構造最適化問題としての最大荷重設計は最小重量設計に3つの数学的変換を行った最適設計であるという数学的位置付けができた。計算効率については、数値実験では大幅な改善がなされた結果が得られた。しかし、理論的には、局所的最適解の多数発生の可能性、微分の差分近似に対する不安定性の増大等の問題が残っており、より複雑な構造最適化問題にはどのような影響を受けるか今後の課題である。

参考文献1) 長谷川彰夫, 坂下克之, 西野文雄: 最大荷重設計と最小重量設計の等価性, 第38回土木学会年講, 1983. 9.

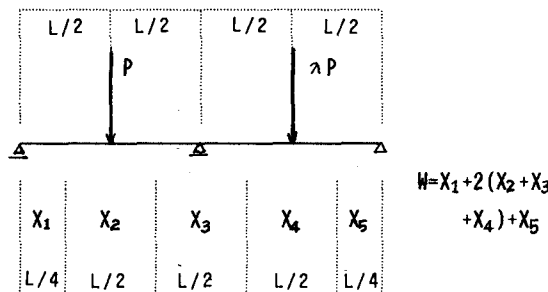


Fig. 2 Beam for Numerical Experiment

Table 1 Numerical Experiment

	Load P	Weight W	C.T. (sec)
P0 MWD	5000.0	2127.3	24.8
P1	5000.0	2134.1	2.8
P2	4870.0	2100.0	2.0
P3 MLD	4870.0	2100.0	1.0