I-105　単純支承端から発生したクラックの応力解析

新日本製鐵（株）正　員　竹内貴司
名古屋工業大学　正　員　長谷部宣男

1、はじめに

二次元平面弾性の混合境界値問題を、複素応力関数と等角写像関数を用いて応力解析を行なう。本報告では、外力成分p_x・p_yが与えられる境界（境界L）と、変位・外力のそれぞれ片方成分v_y・p_xが与えられる直線境界（境界M）の二つの境界によって境界線が構成される問題を取り上げ、その一般解を誘導する。解析モデルとして単純支承端から発生したクラックを選び、荷重条件として単純支承が引張荷重を受け、回転が拘束された場合を考える。

2、一般解の誘導

物理領域を単位円内に写像する関数を次式のような分数式の和の形に表わす。

$$z=\omega(\zeta)=\frac{E_0}{1-\zeta}+\sum\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+E_c \tag{1}$$

ここで、E_0, E_k, E_c, ζ_kは形状によって決まる定数である。複素応力関数$\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$は、外力の作用していない自由境界が存在すれば解析接続の定理より

$$\psi(\zeta)=-\bar{\varphi}(1/\zeta)-\bar{\omega}(1/\zeta)\cdot\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \tag{2}$$

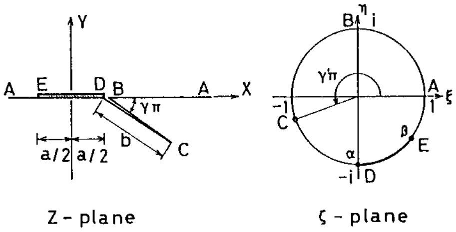

図1　物理面と単位円

となる。L上でp_x・p_y, M上でv_y・p_xが与えられる境界条件式は次式になる。

$$\varphi^+(\sigma)-\varphi^-(\sigma)=i\int(p_x+ip_y)ds\equiv f_1(\sigma) \qquad \text{L上}$$

$$\left.\begin{array}{l} K\varphi^+(\sigma)+\varphi^-(\sigma)-K\overline{\varphi^+(\sigma)}-\overline{\varphi^-(\sigma)}=4iGv_y(\sigma)\equiv if_2(\sigma) \\ \varphi^+(\sigma)-\varphi^-(\sigma)-\overline{\varphi^+(\sigma)}+\overline{\varphi^-(\sigma)}=2i\int p_x ds\equiv if_3(\sigma) \end{array}\right\} \text{M上} \tag{3-a,b,c}$$

ここで、添字の+,-はそれぞれ単位円内、円外から円周上に近づくことを示す。Gはせん断弾性係数、Kはポアソン比の関数で、平面応力の場合$K=(3-\nu)/(1+\nu)$、平面ひずみの場合$K=3-4\nu$である。以下、$\varphi(\zeta)$の誘導の概略を記す。まず、式(3-c)をHilbert問題に帰着させて解き、その解を式(3-b)に代入しM上の境界条件式を次式のように一つの式で表わす。

$$\varphi^+(\sigma)+\varphi^-(\sigma)=\frac{if_2(\sigma)+K\left[\frac{1}{2\pi i}\int if_3(\sigma)\right]^-+\left[\frac{1}{2\pi i}\int if_3(\sigma)\right]^+}{K+1}+g_a(\sigma)\equiv f_4(\sigma)+g_a(\sigma) \tag{4}$$

ここで、$g_a(\zeta)$は任意の分数式の和である。式(3-a)と(4)より$\varphi(\zeta)$を見出すために、

$$\chi^+(\sigma)/\chi^-(\sigma)=1 \quad \text{L上} \qquad \chi^+(\sigma)/\chi^-(\sigma)=-1 \quad \text{M上} \tag{5}$$

なる性質を持つPlemelj関数を導入する。式(3-a)と(4)の両辺を$\chi^+(\sigma)$でわり、左辺を$\varphi(\zeta)/\chi(\zeta)$の境界値と考え、再びHilbert問題に帰着させることによって$\varphi(\zeta)$は得られる。

$$\varphi(\zeta)=\frac{\chi(\zeta)}{2\pi i}\int_{L+M}\frac{f(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma+g_b(\zeta)\chi(\zeta) \tag{6}$$

ここで、$f(\sigma)$はL上で$f(\sigma)=f_1(\sigma)$, M上で$f(\sigma)=f_4(\sigma)+g_a(\sigma)$, $\chi(\zeta)=(\zeta-\alpha)^{\frac{1}{2}}(\zeta-\beta)^{\frac{1}{2}}$, $g_b(\zeta)$は任意の分数式の和である。$g_a(\zeta)$、$g_b(\zeta)$を、式(2)が単位円内で正則になり、境界条件式(3)を満足するように決定すると$\varphi(\zeta)$は結局次式になる。

$$\varphi(\zeta)=\frac{\chi(\zeta)}{2\pi i}\left[\int_L\frac{f_1(\sigma)d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}+\int_M\frac{f_4(\sigma)d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}\right]-\frac{1}{2}\left[\sum\frac{\overline{A_k}B_k}{\zeta_k-\zeta}+\sum\frac{\chi(\zeta)\overline{A_k}B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k-\zeta)}-\sum\frac{A_k\overline{B_k}\zeta_k'^2}{\zeta_k'-\zeta}+\sum\frac{\chi(\zeta)A_k\overline{B_k}\zeta_k'^2}{\chi(\zeta_k')(\zeta_k'-\zeta)}\right] \tag{7}$$

ここで、A_kは境界条件によって決定される未定定数で$\varphi'(\zeta_k)=A_k$, $B_k=E_k/\overline{\omega'(\zeta_k)}$, $\zeta_k'=1/\overline{\zeta_k}$である。
後の説明のために、最初の〔 〕を$H(\zeta)$、二番目のそれを$g(\zeta)$とおく。

3、解析例

単純支承下面を境界M、その他の部分を境界Lに対応させ、図2に示すような単純支承端から発生したクラックの応力解析を行なった。単純支承が引張荷重を受け、回転が拘束される場合の境界条件式は次式になる。

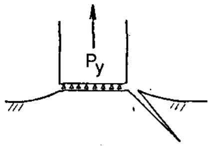

図2 解析モデル

$$L上\quad i\int(p_x+ip_y)ds=0 \quad on\ EA \qquad M上\quad v_y=p_x=0 \qquad (8)$$
$$=P_y \quad on\ ABCD$$

式(7),(8)より$H(\zeta)$は、次式のようになる。

$$H(\zeta)=\frac{iP_y}{2\pi}\log\frac{2\alpha\beta-\alpha-\beta+\zeta(2-\alpha-\beta)-2\chi(\zeta)\chi(1)}{1-\zeta} \qquad (9)$$

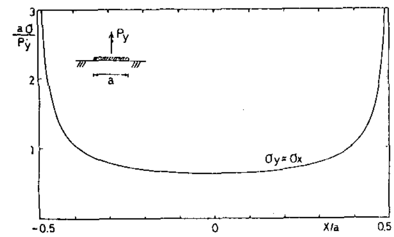

図3 クラック発生前のM上の応力分布

クラック発生前のM上の応力分布を図3に示す。単純支承両端では、$r^{-\frac{1}{2}}$のオーダーで応力集中が起きている。境界Mでは$\sigma_r=\sigma_\theta$ ($\sigma_x=\sigma_y$), $\tau_{r\theta}=0$、境界Lでは$\sigma_r=\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$である。

クラック発生後の応力分布($\gamma\pi=90°$)を図4,5に示す。境界Lでは$\sigma_r=\tau_{r\theta}=0$、境界Mでは$\tau_{r\theta}=0$である。単純支承右端(D点)近傍の応力のオーダーはr^0であり、M,Lそれぞれの領域から右端に近づいた時、$\sigma_{r(M)}=\sigma_{\theta(L)}$, $\sigma_{\theta(M)}=\sigma_{r(L)}=0$になり、応力は連続的に変化する。(ただし、第二添字は近づいて来た境界を示す。)

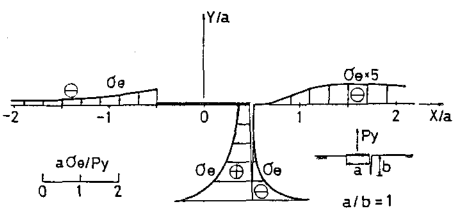

図4 クラック発生後のL上の応力分布

単純支承左端(E点)近傍の応力のオーダーは$r^{-\frac{1}{2}}$であり、応力成分は次式で表わされる。

$$\sigma_x=\frac{a_1}{4\sqrt{r}}\left(3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{5\theta}{2}\right)+4a_2$$
$$\sigma_y=\frac{a_1}{4\sqrt{r}}\left(5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}\right) \qquad (10-a,b,c)$$
$$\tau_{xy}=\frac{a_1}{4\sqrt{r}}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{5\theta}{2}\right)$$

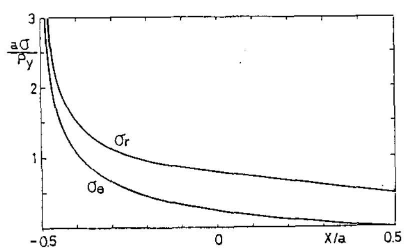

図5 クラック発生後のM上の応力分布

ここで、rはE点からの距離、a_1, a_2はE点近傍における応力関数の$r^{-\frac{1}{2}}, r^0$の実部係数である。θはM上で$\theta=0$, L上で$\theta=\pi$になるようにとる。$\sigma_{\theta(L)}$は、$\theta=\pi$のσ_xであるから$r^{-\frac{1}{2}}$の係数が0になりr^0のオーダーで一定値に収束する。$\sigma_{\theta(M)}$と$\sigma_{r(M)}$は、$\theta=0$のσ_x, σ_yであるから応力は$r^{-\frac{1}{2}}$のオーダーで発散する。従って、応力はE点で不連続になる。また、この境界条件の応力関数はポアソン比に無関係であるから応力分布もポアソン比に依存しない。

次式で無次元化される応力拡大係数を図6に示す。

$$F_I+iF_{II}=\begin{cases}\dfrac{(K_I+iK_{II})\sqrt{a}}{P_y\sqrt{\pi}} & 0\le b/a\le 1\\[2ex] \dfrac{(K_I+iK_{II})\sqrt{b}}{P_y\sqrt{\pi}} & 0\le a/b\le 1\end{cases} \qquad (11)$$

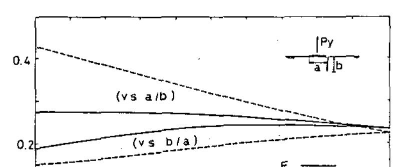

図6 無次元化された応力拡大係数 F_I, F_{II}

$b/a=0$の極限は、D点に集中荷重がかかっている特別な場合に相当し、$F_I=0.4114$, $F_{II}=0.2624$である。この値と文献(1)の値との誤差はそれぞれ0.15%, 0.07%であった。

(参考文献) 1) Hasebe, N., "An Edge Crack in a Semi-Infinite Plate Welded to a Rigid Stiffener" 土木学会論文報告集312号, 1981