

山梨大学・工学部 正員 平島健一
 福島工専・土木工学科 正員 根岸嘉和
 山梨大学・大学院 学生員 小尾博俊

1. 緒言

従来までに発表されている板厚方向に2次元化した平板理論を大別すると、変位仮定理論と応力仮定理論に分類されるが、本文では後者の理論系に立脚して、平板曲げのみならず、その伸縮挙動をも含めた平板の一般化理論の確立を目指したものである。

すなわち、平板の上下表面での境界(荷重)条件を完全に満足するように全ての応力成分をLegendre多項式系列の級数和によって表示し、かつ変位に関しても仮定した応力成分との整合性を保持するような級数展開を行なう。得られた基礎式は"断面力関数" Φ^m を導入することにより、2次元のLaplace演算子とそれらの組み合わせによって表現できることから伸縮、曲げを受ける平板の問題への高精度な解析が可能な理論構成になっている。

本理論式の低次項を採用した結果は最近発表されたReissnerおよび古賀の曲げに関する2次元近似理論に帰着されるが、本文ではその定式化過程の概要と平板の面外ねじり問題へ適用した場合の数値結果を数種のorderの理論について示す。

2. 理論式の誘導 $(k=2b)$

いま平板は等質等方で板厚一定 b であって、その作用荷重に対してFig. 1のように座標系を設定する。3次元応力成分を平板の上下表面における境界条件を満足するように、板厚方向に無次元化した座標 $\xi = z/b$ ($-1 \leq \xi \leq 1$) に関して次のような級数展開を行なう。

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{xy}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xz}^{(n)}, \tau_{yx}^{(n)}, \tau_{xy}^{(n)}) P_n(\xi), \\ (\tau_{xz}, \tau_{yz}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xz}^{(n)}, \tau_{yz}^{(n)}) R_n(\xi), \\ \tau_{zz} &= -\frac{P}{2} + b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{zz}^{(n)} S_n(\xi), \quad (\tau_{zz}^{(0)} = -\frac{3}{2} P) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、 $R_n(\xi)$ はLegendre多項式であり、 $R_n(\xi)$, $S_n(\xi)$ は $P_n(\xi)$ と

$$\left. \begin{aligned} R_n(\xi) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1), \quad R_n(\xi) = \int_{\xi}^1 P_n(\xi) d\xi, \\ S_n(\xi) &= \int_{\xi}^1 R_n(\xi) d\xi = \int_{\xi}^1 \int_{\xi}^1 P_n(\xi) d\xi d\xi. \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

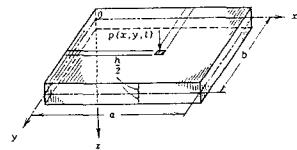


Fig. 1 平板および作用荷重とその座標系

なる関係がある。また、 x, y 方向の各変位成分および面外変位(z 方向)を次のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} (u_x, u_y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_x^{(n)}, u_y^{(n)}) P_n(\xi), \\ u_z &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 u_z R_n(\xi) d\xi, \quad (u_{z0} = \int_{-1}^1 u_z d\xi) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

後で使用する上、次のような諸量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_z^{(n)} &= b \int_{-1}^1 \tau_{zz} P_n(\xi) d\xi = -b P \delta_{n0} - b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)}, \\ \Gamma_m^n &= \int_{-1}^1 R_m(\xi) R_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2n+1} (\Gamma_m^{n+1} - \Gamma_m^{n-1}), \\ \bar{\Gamma}_m^n &= \int_{-1}^1 P_n(\xi) R_m(\xi) d\xi = \frac{2}{(2n+1)(2m+1)} (\delta_{n,m+1} - \delta_{n,m-1}) \end{aligned} \right\} (4)$$

上式中の δ_{ij} はkroneckerのdeltaである。

次に、物体力を無視した静的な3次元弾性論の定式化方程式および等方性の場合のHookeの法則を用い、板厚方向に重みつき積分平均を行ない、先に定義した応力係数、変位係数間の関係式を求めれば、最終的に次のような結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu} b (u_{z,x}^{(n)} + \nu u_{z,y}^{(n)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{2n+1}{2b} \Omega_z^{(n)} \\ &\quad - b^2 (2n+1) \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{xz}^{(m)} - \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{zz}^{(m)}), \\ \tau_{yx}^{(n)} &= \frac{E}{1+\nu} b u_{y,x}^{(n)} - b^2 \frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{yx}^{(m)} + \tau_{yz}^{(m)}) \\ - \tau_{yz}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2} b \nu^2 u_{z,y}^{(n)} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{2n+1}{2b} \Omega_{yz}^{(n)} \\ &\quad - b^2 \frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\nu^2 \tau_{yz}^{(m)} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \tau_{zz}^{(m)}), \\ \tau_{xy}^{(m)} &= \dots, \quad \tau_{yx}^{(m)} = \dots \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

$$u_z^{(m)} = \frac{\nu}{1-\nu} b^2 \left\{ \frac{\nabla^2 u_z^{(m+2)}}{(2m+3)(2m+5)} - \frac{2\nabla^2 u_z^{(m)}}{(2m-1)(2m+3)} + \frac{\nabla^2 u_z^{(m-2)}}{(2m-3)(2m-1)} \right\} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2(1-\nu)E} \left\{ \frac{\sigma_z^{(m+2)}}{2m+3} - \frac{2(2m+1)\sigma_z^{(m)}}{(2m-1)(2m+3)} + \frac{\sigma_z^{(m-2)}}{2m-1} \right\}$$

$$= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\nu}{E} b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma_m^{m+2}}{2m+3} - \frac{2(2m+1)\Gamma_m^m}{(2m-1)(2m+3)} + \frac{\Gamma_m^{m-2}}{2m-1} \right\} \tau_{zz}^{(m)} \dots (7)$$

なお、コンマの後の添字はその添字の座標にある偏微分を意味し、 ∇^2 は2次元のLaplacian($\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)である。これらの応力係数が満たすべき2次元化した釣合方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx,z}^{(m)} + \tau_{yy,z}^{(m)} + \tau_{zz}^{(m)} &= 0, \\ \tau_{yy,x}^{(m)} + \tau_{xx,x}^{(m)} + \tau_{yz}^{(m)} &= 0, \\ \tau_{zz,x}^{(m)} + \tau_{yz,y}^{(m)} + \tau_{zz}^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

3. 従来までの理論との関係および数値例

Reissner²⁾および古賀³⁾の各平板曲げの理論は、前節で誘導した理論式の上添字(n)において、 $n=1$ (1-order theory), または $n=1,3$ (2-order theory)の有限項を採用した結果に完全に一致する。また、 n に偶数項を採用すれば平板の伸縮挙動の支配方程式が得られる。ここでは平板曲げ理論に限定し、Fig. 2に示すような長方形平板において、対向する端面にトルク M_T を加え、端面が \odot だけ回転する問題を考えるが、解析過程はReissnerおよび古賀の各論文に詳細に記述されているので本文では数値結果のみを示すことにする。図に示した平板表面でのせん断力(τ_{xy}, τ_{xz})、トルク(M_T)を次式のように定義し、

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 G_0 b, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 G_0 b, \quad M_T = \tau_T^0 G_0 (2b)^2 (2a) \dots (9)$$

種々の a/h 値に対して τ_{xy}, τ_{xz} および τ_T の絶対値を計算して、Reissner, 古賀の各理論および厳密解と比較した(Table 1)。理論式のorderを上げるにつれ、高次修正の効果が顕著に表われている。なお、表中には変位仮定理論によって得られた結果も示されている。

4. 結言

本文の結論をまとめるに次の通りである。

- (1) 平板上下表面での境界条件を完全に満足させることを基本とした応力仮定型の一般的な理論を定式化した。
- (2) 本定式化を特殊化すると、従来までに提案されている応力仮定型の曲げの諸理論と一致する。
- (3) ここで取り上げた数値例によれば、理論式のorderを上げるにつれ厳密解へ一層近づき、高次修正の効果が

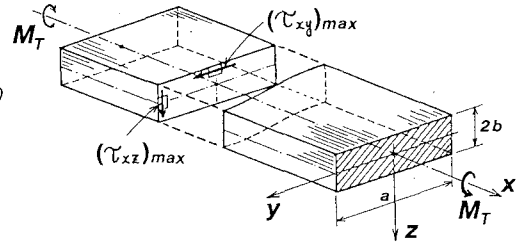


Fig. 2 トルク M_T も受ける平板の面外ねじり

Table 1 各種理論による τ_{xy}, τ_{xz} および τ_T の絶対値比較

τ	a/h	Exact	Stress Assum. Theory			Displacement Assum. Theory ¹⁾	
			1-order	2-order ^{2,3)}	3-order	2-order	3-order
τ_{xy}	8.0	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
	5.0	1.9987	1.9985	1.9988	1.9987	1.9987	1.9987
	3.0	1.9709	1.9652	1.9711	1.9709	1.9709	1.9709
	2.0	1.8601	1.8305	1.8613	1.8601	1.8600	1.8601
	1.5	1.6951	1.6299	1.6977	1.6951	1.6950	1.6951
	1.0	1.3506	1.2105	1.3545	1.3510	1.3519	1.3506
	0.5	0.7394	0.4952	0.7244	0.7426	0.7453	0.7398
	0.1	0.2970	0.0960	0.2165	0.2832	0.2629	0.2995
τ_{xz}	8.0	1.4849	1.5811	1.4625	1.4926	1.5133	1.4791
	5.0	1.4849	1.5811	1.4625	1.4929	1.5133	1.4791
	3.0	1.4846	1.5809	1.4622	1.4926	1.5131	1.4788
	2.0	1.4789	1.5755	1.4565	1.4868	1.5074	1.4730
	1.5	1.4560	1.5538	1.4337	1.4640	1.4850	1.4502
	1.0	1.3506	1.4327	1.3283	1.3586	1.3817	1.3448
	0.5	0.9301	1.0416	0.9070	0.9379	0.9666	0.9239
	0.1	0.3998	0.4840	0.3723	0.4087	0.4179	0.3917
τ_T	8.0	0.3071	0.3070	0.3071	0.3071	0.3071	0.3071
	5.0	0.2913	0.2912	0.2913	0.2913	0.2913	0.2913
	3.0	0.2633	0.2631	0.2633	0.2633	0.2633	0.2633
	2.0	0.2287	0.2283	0.2287	0.2287	0.2287	0.2287
	1.5	0.1958	0.1952	0.1958	0.1958	0.1958	0.1958
	1.0	0.1406	0.1396	0.1406	0.1406	0.1406	0.1406
	0.5	0.0572	0.0556	0.0571	0.0572	0.0574	0.0574
	0.1	0.0117	0.0107	0.0116	0.0116	0.0119	0.0119
	0.1	0.0031	0.0028	0.0030	0.0031	0.0032	0.0032

顕著である。

また、本文では主として面外(曲げ)挙動のみに限って従来までの理論との関係ならびに例題について述べたが、本定式化は採用項数に何らの制限を受けない完全な一般化がなされており、面内(伸縮)挙動をも包括した問題への適用を試み、その精度特性を解明することが今後の研究課題である。

《参考文献》1) 平島・根岸, 工学会論文報告集, No. 330, pp. 1~14, 1983; No. 333, pp. 21~34, 1983; No. 336, pp. 9~20, 1983; No. 341, pp. 163~172, 1984 2) Reissner, E., ZAMM, 63, pp. 285~289, 1983; J. Appl. Mech., 12, pp. A69~A77, 1945 3) 古賀, 日本機械学会論文集, 48, pp. 1151~1159, 1982