

北海道大学 正員 三上 隆
北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに 構造物の初期の過渡応答を知りたいとき、すなわち構造物を伝わる弾性波が境界に達して戻って来るまでくらの時間率の応答を知りたい場合には、波動論的取扱いが必要である。例えば、構造物の一点に衝撃力が作用する問題や構造物の境界が強制変位を受ける問題などに波動伝播現象が見られる。さて、回転殻の過渡応答解析は、一般にFEMやFDMなどの離散化手法によって行なわれることが多い。しかしながら、それは固有振動が誘起される時間率での解析が多く、応力波の伝播を考慮する必要がある衝撃初期の応答に対するものは比較的少ない。応力波伝播問題にFEMなどを適用する場合には問題の性質上、空間領域の近似度を上げるため要素細分割が要求され、その結果大次元の行列演算の必要性や計算精度の低下が予想される。本報告は、空間領域の一離散化手法として、選点法の適用可能性を検討を行ったものである。数値例では、本手法による解の信頼性や有効性の検証を目的とし、円筒殻に対する解析例を示すとともに、他の数値解(理論解)との比較により、本手法の特性および解析結果に考察を加える。

2. 解析方法

1) 基礎式 図-1に示すように軸方向に沿ってN個の領域に分割し、境界条件が指定される①と②(N+1)を境界点、②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿を連続点と名付ける。せん断変形・回転慣性を考慮した修正殻理論¹⁾によれば、円筒方向フーリエ級数展開後の運動方程式は、軸方向座標sと時間tに関する2階5元連立微分方程式で与えられる。いま、(k)領域に対しては、次式で表わされるものとする。

$$L_i^{(k)}(s, t, U, V, W, \Phi, \Theta) = 0 \quad (i=1 \sim N, k=1 \sim 5) \quad (1)$$

ここに、U, V, W = 軸、円周、円厚方向変位、 Φ, Θ = 軸、円周方向回転角、また、境界点(①と②(N+1))で与えられる境界条件および連続点(②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉛㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾㊿)での接続条件は次式で表わされるものとする。

$$B_i^{(k)}(s, t, U, V, W, \Phi, \Theta) = 0 \quad (i=1 \sim N, k=1 \sim 5) \quad (2)$$

$$C_i^{(k)}(s, t, U, V, W, \Phi, \Theta) = 0 \quad (i=1 \sim N, k=1 \sim 5) \quad (3)$$

2) 定式化 各領域の未知関数、例えばUを次のように表わす。 $U_i^{(k)}(s, t) = \sum_{r=0}^{M-1} d_{i,r}^{(k)}(t) s^{r-1}$, $r=1 \sim M$ (4) ここに、Mは内部選点数を表わし、選点は区間[0, 1]で定義されるshifted Legendre多項式の零点を用いる。また、問題を簡単化するため、ここでは関数の値すなわち、内部選点($s_j, j=1 \sim M$)と端点($s_0=0, s_{M+1}=1$)の時刻における値を求める問題へと変換する。そのため、sに関する1, 2階導関数を次式で表わす。

$$\{U_i^{(k)}\} = [A] \{U_i\}, \quad \{U_i^{(k)'}\} = [B] \{U_i\} \quad (5)$$

ここに、(A)はsに関する微分を表わし、[A], [B]は

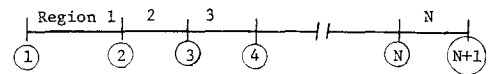


図-1 領域分割

(M+2)次の行列、 $\{U_i\}^T = (U_{i0}, U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{iM+1})$ などである。

さて、N領域分割による(5M+10)N個の未知数に対する条件は次のように得られる。まず、5MN個の条件は、各領域の微分方程式の残差の条件より与えられる、

$$\int_0^1 L_i^{(k)}(s, t, U, V, W, \Phi, \Theta) \delta(s-s_j) ds = 0 \quad (i=1 \sim N, j=1 \sim M) \quad (6)$$

と表わされる。これを、内部選点と端点に関する未知量に分離し行列表示すれば次式となる。

$$[D_c^{(k)}] \{ \delta_c \}_i + [D_e^{(k)}] \{ \delta_e \}_i = \{ P_c^{(k)} \}_i + [P_e^{(k)}] \{ \delta_c \}_i \quad (7)$$

ここに、添字c, eは内部選点および端点に関する行列、ベクトルを表わし、()は時間tに関する微分を、{P}は荷重ベクトルである。さらに、式(2)と(3)より、それぞれ10個および10(N-1)個の条件式が得られ、空間領域の離散化が完了する。後は、初期条件を介して、時間に関する(5M+10)N次のマトリックス方程式を解けばよい。

3. 数値例 本手法の適用性、有効性を検討するため、両端単純支持された円筒殻を解析し、他の理論解(モーダル解析法)との比較により、本手法の特性および解析結果に考察を加える。解析モデルは、ポアソン比=0.3, スパン長/半径=L/a=6, 厚さ(h)/半径(a)

$= 0.1$ で、スパン中央に余弦状分布荷重 ($\sigma \cos nB$, n = 周方向波数) がステップ関数状に作用する場合である。本手法による場合は対称性より $0 \leq X \leq L/2$ の範囲で解析し (X = 支点からの距離) し、時間積分は Houbolt 法によった。なお、領域数は $N = NE = 5, 10$ (一領域内の要素数 $M = 11$) とし、時刻割幅 Δt は要素間の最小距離 ($X_1 - X_0$ or $X_{M+1} - X_M$) を縦波が伝播する時間 Δt_{crit} を基準にし、 $\Delta t / \Delta t_{crit} < 1$ となるように設定した。図-2~4 に波数 $n=1$ の荷重が作用するときの着目点 X (支点からの距離) における、たれみ (W)、合応力 (N_x) およびモーメント (M_x) の時間履歴を示す。図中、実線はモーダル解析法の結果 (180 項程度で収束) である。

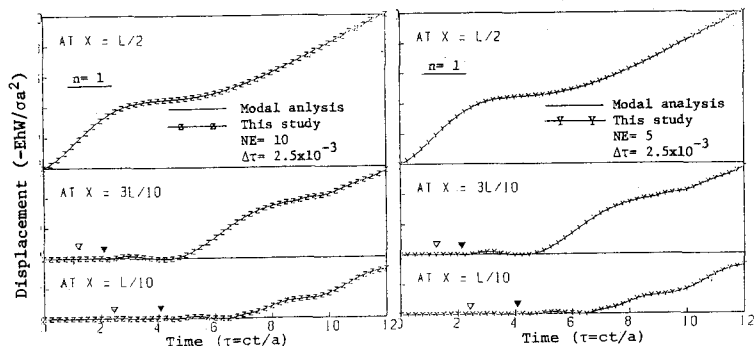


図-2 たれみ W の時間応答 ($C = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$)

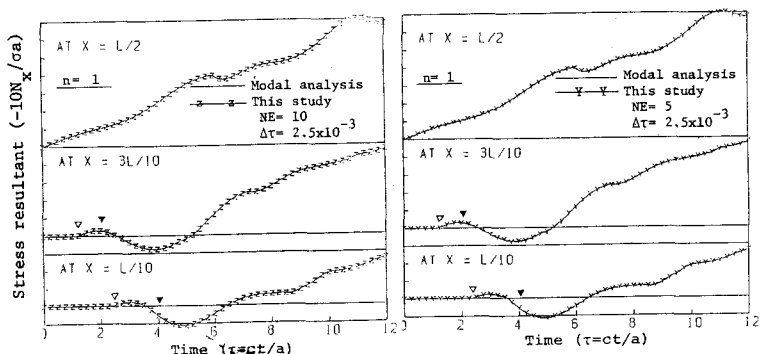


図-3 合応力 N_x の時間応答 ($C = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$)

たれみ W (図-2) と合応力 N_x (図-3) は、 NE と Δt に関係なくモーダル解と一致し、 $X \neq L/2$ での W , N_x の応答はそれぞれ、衝撃点から伝播するせん断波、縦波の到達後に立ち上がるなど波の伝播の様子を正確に表わしている (図の ∇ , $\circ$ はそれぞれ、着目点に最初に到達する縦波とせん断波の時刻を表す)。

曲げモーメント M_x の応答は、高次の振動成分を残しながらモーダル解を近似している。領域数が等しい ($NE = 5$) のときの応答には、時刻割幅 Δt を小さくした効果が現れていない。これは空間領域の離散化に伴う誤差であることを示唆している。ちなみに、 $NE = 10$ の結果は著しく改善され、モーダル解とよく一致している。なお、 $X = L/2$ の応答図の $\circ$ は、衝撃点から伝播した縦波が支点で反射され衝撃点に最初に到達する時刻であり、 ∇ は同じくせん断波の到達時刻である。

4. まとめ 応力波伝播の問題に対する一近似解法を提示した。限られた数値例であるが、それによると本解析法の精度が良好であること、応力波の伝播現象が忠実に表現されることが確認できた。参考文献 1) Magrab, E.B., "Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff & Noordhoff, 1979.

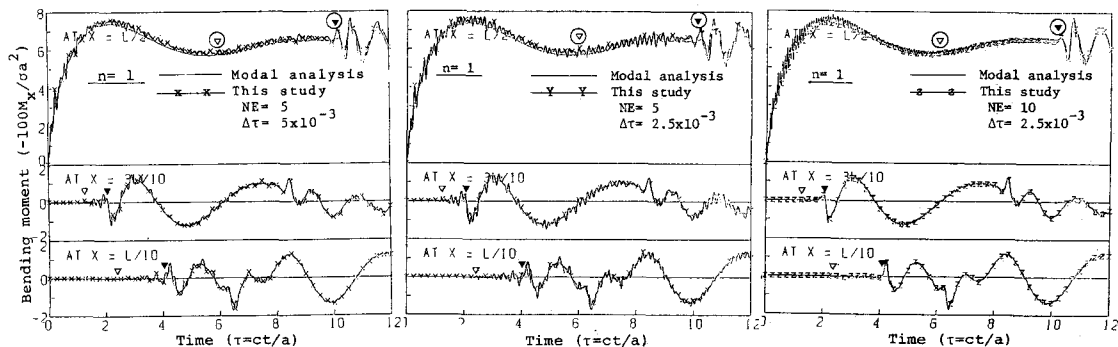


図-4 曲げモーメント M_x の時間応答 ($C = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$)