# I-97　薄肉弾性シェルの幾何学的非線形理論に関する変分原理

東京電機大学　正員　井浦雅司

## 1．序論

有限要素法の発展と共に変分原理に関する研究も数多くなされており，いろいろな汎関数が提案されている[(1)~(4)]。本報告では幾何学的非線形理論に基づき，有限回転を伴うKirchhoff-Love形の薄肉弾性シェルに適用し得るHu-Washizuの変分原理について考察する。従来の研究においては，微小ひずみの仮定を当初から導入した基礎式に基づいて汎関数を導いているために，非線形項の取扱いに統一性がかけている。さらに有限回転の影響を考慮した研究においては，そのほとんどが文献（5）に基づいており，そこで用いられている近似曲率変化テンソルが，変位およびその導関数に関する3次項で表わされていることを考慮するならば，これらの研究の適用範囲も限られてしまうものと思われる。ここでは，微小ひずみの仮定を用いずに得られたシェルの平衡方程式および境界条件式をもとに[(6)]，材料がhyperelastic materialよりなるものと仮定して汎関数を導いている。なお，主な記号は文献（6）と同一であるが，一部異なった記号を用いている。

## 2．基礎式

変形前のシェル中央面M上における基底ベクトルを$\mathbf{a}_\alpha$，単位法線ベクトルを$\mathbf{n}$とする。そして第1，第2基本計量テンソルを$a_{\alpha\beta}=\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta$，$b_{\alpha\beta}=\mathbf{a}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{n}$とし，さらに$a=\det|a_{\alpha\beta}|$とする。また，境界C上における単位接線ベクトルは$\mathbf{t}$，外向き法線ベクトルは$\boldsymbol{\nu}$とおく。M上における変位ベクトルを$\mathbf{u}=u^\alpha\,\mathbf{a}_\alpha+w\,\mathbf{n}$　とし，変形後のシェル中央面$\overline{\mathrm{M}}$上における諸量は対応する変形前の量に上付バーをつけて表す。外力の作用方向は常に一定であると仮定し，シェル中央面上に分布外力ベクトル$\mathbf{P}=p^\alpha\mathbf{a}_\alpha+p\mathbf{n}$，シェル境界上に外力ベクトル$\mathbf{N}=N_\nu\boldsymbol{\nu}+N_t\mathbf{t}+N\mathbf{n}$，モーメントベクトル$\mathbf{K}=-K_t\boldsymbol{\nu}+K_\nu\mathbf{t}+K\mathbf{n}$，が作用する。以上の条件の下で，ひずみと変位の関係式は

$$\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha\cdot\bar{\mathbf{a}}_\beta-\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta)\quad,\qquad \kappa_{\alpha\beta}=-(\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{n}}-\mathbf{a}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{n})\tag{1-a,b}$$

と表わされる。変形後の接線ベクトル$\bar{\mathbf{a}}_t$は，

$$\bar{\mathbf{a}}_t=\mathbf{t}+d\mathbf{u}/ds=c_\nu\boldsymbol{\nu}+c_t\mathbf{t}+c\mathbf{n}\tag{2}$$

となり，ここで，

$$c_\nu=du_\nu/ds+\tau_t w-\kappa_t u_t,\quad c_t=1+du_t/ds+\kappa_t u_\nu-\sigma_t w\ ,\quad c=dw/ds+\sigma_t u_t-\tau_t u_\nu\tag{3-a,b,c}$$

であり，$\sigma_t$，$\tau_t$，$\kappa_t$はそれぞれC上における法曲率，測地的ねじれ率，測地的曲率を示し，$u_\nu$，$u_t$はC上における変位ベクトルの外向き法線方向と接線方向の成分である。変形がKirchhoff-Loveの仮定に従うことから$\bar{\mathbf{a}}_\alpha\cdot\bar{\mathbf{n}}=0$となり，さらに$\bar{\mathbf{n}}\cdot\bar{\mathbf{n}}=1$を用いると以下の関係式が得られる。

$$\beta_t=\ -[C_\nu C_t\beta_\nu+C\sqrt{(1+2\gamma_{tt})(1-\beta_\nu^2)-C_\nu^2}\ ]/(1+2\gamma_{tt}-C_\nu^2)\tag{4-a}$$

$$\beta=-1-[C_\nu C\beta_\nu-C_t\sqrt{(1+2\gamma_{tt})(1-\beta_\nu^2)-C_\nu^2}\ ]/(1+2\gamma_{tt}-C_\nu^2)\tag{4-b}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\beta}=\bar{\mathbf{n}}-\mathbf{n}=\beta_\nu\boldsymbol{\nu}+\beta_t\mathbf{t}+\beta\mathbf{n}\ ,\quad \gamma_{tt}=\frac{(|\bar{\mathbf{a}}_t|^2-1)}{2}=\frac{(|\bar{\mathbf{a}}_\nu|^2-1)}{2}=\frac{(\bar{\mathbf{a}}_t)^2-1}{2}\tag{5-a,b}$$

構成方程式は，材料がhyperelastic materialよりなるものと仮定しているので，弾性ポテンシャル関数$\Sigma$が存在し，以下のように表わされる。

$$\partial\Sigma/\partial\gamma_{\alpha\beta}=N^{\alpha\beta}\ ,\qquad \partial\Sigma/\partial\kappa_{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}\tag{6-a,b}$$

ここに，$N^{\alpha\beta}$，$M^{\alpha\beta}$はそれぞれ対称の合応力テンソルとモーメントテンソルである。

## 3．変分原理

Kirchhoff-Loveの仮定に従う薄肉シェルの仮想仕事の原理は，

$$\iint_M(N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta})\,dA=\iint_M\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dA+\int_c(\mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{K}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t)\,dS\tag{7}$$

と表わせる。ここで，$\boldsymbol{\Omega}_t$はシェル境界上における有限全回転ベクトルである。これより，シェルの平衡方程

式は $\mathbf{T}^{\beta}|_{\beta}+\mathbf{P}=0$ ・・・・・（8）と求まり，ここに，

$$\mathbf{T}^{\beta}=T^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}+Q^{\beta}\bar{\mathbf{n}}\ ,\qquad T^{\alpha\beta}=N^{\alpha\beta}-\bar{b}^{\alpha}_{\kappa}M^{\kappa\beta} \tag{9-a,b}$$

$$Q^{\beta}=M^{\alpha\beta}|_{\alpha}+\bar{a}^{\beta\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\kappa}M^{\alpha\kappa}\ ,\qquad \gamma_{\lambda\alpha\beta}=\gamma_{\lambda\alpha}|_{\beta}+\gamma_{\lambda\beta}|_{\alpha}-\gamma_{\alpha\beta}|_{\lambda} \tag{9-c,d}$$

である。力学的境界条件式は，$C_1$ 上で $\mathbf{F}$ と $M_{\nu\nu}$ が，$M_j\in C_1$ で $\mathbf{R}_j$ がそれぞれ規定され，ここに，

$$\mathbf{F}=\mathbf{T}^{\beta}\nu_{\beta}+(M_{t\nu}\bar{\mathbf{n}})_{,s}\ ,\quad M_{\nu\nu}=M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta}\sqrt{\bar{a}/a}\,h_{\nu}/\bar{a}_t\ ,\quad \mathbf{R}_j=\mathbf{R}(S_j+0)-\mathbf{R}(S_j-0)$$

$$M_{t\nu}=M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\{t_{\beta}+(\bar{b}_t/\bar{a}_t^{2}-\sqrt{\bar{a}/a}\,h_t/\bar{a}_t)\nu_{\beta}\}\ ,\quad \mathbf{R}=-M_{t\nu}\bar{\mathbf{n}} \tag{10-a∼e}$$

であり，$\bar{b}_t$，$h_{\nu}$，$h_t$ は変位に関する項でその定義は文献（6）を参照されたい。一方，幾何学的境界条件式は，$C_2$ 上で $\mathbf{u}$ と $\beta_{\nu}$ が，$m_i\in C_2$ で $\mathbf{u}_i$ がそれぞれ規定される。

ここで，外力の作用方向が常に一定であることから，外力のポテンシャル $\Phi(\mathbf{u})=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$，$\Psi(\mathbf{u},\beta_{\nu})=-\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\Omega}_t$ が存在し，その変分は外力による仮想仕事を表わす。さらに，弾性ポテンシャル関数の変分は $\delta\Sigma(\gamma_{\alpha\beta},\kappa_{\alpha\beta})=N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta}$ となることから，仮想仕事の原理は以下の変分原理に変換される。

$$\delta I_1=0\ ,\quad I_1=\iint_M[\Sigma(\gamma_{\alpha\beta},\kappa_{\alpha\beta})-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}]dA-\int_{C_1}[\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\Omega}_t]\,ds \tag{11}$$

ここに，付帯条件は（1）式のひずみと変位の関係式 $\gamma_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$ と $\kappa_{\alpha\beta}=\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$，$C_2$ 上における境界条件式 $\mathbf{u}=\mathbf{u}^{*}$，$\beta_{\nu}=\beta_{\nu}^{*}$，$M_i\in C_2$ における条件式 $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i^{*}$，さらに $C_1$ 上における幾何学的条件式（4）である。

以上の付帯条件を，Lagrangeの乗数法により汎関数の中に導入すると，以下の汎関数 $I_2$ を得る。

$$\begin{aligned}I_2=&\iint_M[\Sigma(\gamma_{\alpha\beta},\kappa_{\alpha\beta})-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}-N^{\alpha\beta}\{\gamma_{\alpha\beta}-\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\}-M^{\alpha\beta}\{\kappa_{\alpha\beta}-\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\}]\,dA\\&-\int_{C_1}[\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\Omega}_t(\mathbf{u},\beta_t,\beta_{\nu},\beta)-\lambda_t\{\beta_t-\beta_t(\mathbf{u},\beta_{\nu})\}-\lambda\{\beta-\beta(\mathbf{u},\beta_{\nu})\}]\,ds\\&-\int_{C_2}[\mathbf{P}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{u}^{*})+M(\beta_{\nu}-\beta_{\nu}^{*})]\,ds-\sum_i\mathbf{F}_i\cdot(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_i^{*})\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，$N^{\alpha\beta}$，$M^{\alpha\beta}$，$\lambda_t$，$\lambda$，$\mathbf{P}$，$M$，$\mathbf{F}_i$ はLagrangeの乗数である。汎関数 $I_2$ の変分をとると以下のように $\delta I_2$ が求まる。

$$\begin{aligned}\delta I_2=&\iint_M[(\partial\Sigma/\partial\gamma_{\alpha\beta}-N^{\alpha\beta})\delta\gamma_{\alpha\beta}+(\partial\Sigma/\partial\kappa_{\alpha\beta}-M^{\alpha\beta})\delta\kappa_{\alpha\beta}-\delta N^{\alpha\beta}\{\gamma_{\alpha\beta}-\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\}\\&-\delta M^{\alpha\beta}\{\kappa_{\alpha\beta}-\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\}-(\mathbf{T}^{\beta}|_{\beta}+\mathbf{p})\cdot\delta\mathbf{u}]\,dA+\int_{C_1}[\{\mathbf{T}^{\beta}\nu_{\beta}+(M_{t\nu}\bar{\mathbf{n}})_{,s}-\mathbf{N}-\mathbf{Q}_{,s}\}\cdot\delta\mathbf{u}\\&+(M_{\nu\nu}-M^{*}_{\nu\nu})\delta\beta_{\nu}+\delta\lambda_t\{\beta_t-\beta_t(\mathbf{u},\beta_{\nu})\}+\delta\lambda\{\beta-\beta(\mathbf{u},\beta_{\nu})\}+(KC_{\nu}/2\bar{a}_t+\lambda)\delta\beta\\&-(K_t/2-K_{\nu}C_{\nu}/2\bar{a}_t-\lambda_t)\delta\beta_t]\,ds+\int_{C_2}[\{\mathbf{T}^{\beta}\nu_{\beta}+(M_{t\nu}\bar{\mathbf{n}})_{,s}-\mathbf{P}\}\cdot\delta\mathbf{u}-(\mathbf{u}-\mathbf{u}^{*})\cdot\delta\mathbf{P}\\&+(M_{\nu\nu}-M)\delta\beta_{\nu}-(\beta_{\nu}-\beta_{\nu}^{*})\delta M]\,ds+\sum_i[(\mathbf{R}_i-\mathbf{F}_i)\cdot\delta\mathbf{u}_i-(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_i^{*})\delta\mathbf{F}_i]+\sum_j(\mathbf{R}_j-\mathbf{Q}_j)\cdot\delta\mathbf{u}_j\ \cdots\cdots\end{aligned} \tag{13}$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}=&-K_t(\bar{a}_t\mathbf{n}-C\bar{\mathbf{t}})/2\bar{a}_t^{2}+K_{\nu}\{\bar{a}_t(\beta_{\nu}\mathbf{t}-\beta_t\boldsymbol{\nu})+(C_{\nu}\beta_t-C_t\beta_{\nu})\bar{\mathbf{t}}\}/2\bar{a}_t^{2}\\&+K[\bar{a}_t\{\beta_{\nu}\mathbf{n}-(2+\beta)\boldsymbol{\nu}\}-\{C\beta_{\nu}-C_{\nu}(2+\beta)\}\bar{\mathbf{t}}]/2\bar{a}_t^{2}+(\lambda_t f_t+\lambda g_t)\bar{\mathbf{n}}\end{aligned} \tag{14-a}$$

$$\mathbf{Q}_j=\mathbf{Q}(S_j+0)-\mathbf{Q}(S_j-0)\ ,\quad M^{*}_{\nu\nu}=K_{\nu}(1+C_t/\bar{a}_t)/2+KC/2\bar{a}_t+\lambda_t f_{\nu}+\lambda g_{\nu} \tag{14-b,c}$$

$$f_t=-(1+\beta)/\{C_t(1+\beta)-C\beta_t\}\ ,\quad g_t=\beta_t/\{C_t(1+\beta)-C\beta_t\} \tag{14-d,e}$$

$$f_{\nu}=\{\theta_{\nu}-C_{\nu}(1+\beta)\}/\{C_t(1+\beta)-C\beta_t\}\ ,\quad g_{\nu}=-(\beta_{\nu}+f_{\nu}\beta_t)/(1+\beta) \tag{14-f,g}$$

本報告では，有限回転の影響を精確に評価するために，厳密な曲率変化テンソル $\kappa_{\alpha\beta}$ と有限回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_t$ を用いてHu-Washizuの変分原理を導いた。さらに，文献（1）と同様の手法により，別の汎関数を(12)式より導くことができ，また座屈解析への適用も今後の課題である。[7),(8]

## 4．参考文献

(1) R.Schmidt and W.Pietraszkiewicz ; Ingenieur-Archiv 50 (1981) 187-201 . (2) R.Schmidt;ZAMM 62 T165-T167 (1982) (3) W.Pietraszkiewicz and M.Szwabowicz ; ZAMM 62, T156-T158 (1982) (4) H. Stumpf; Ingenieur-Archiv 48 (1979) 221-237. (5)W. Pietraszkiewicz and M.Szwabowicz; Arch. Mech.,33,2,pp.273-288,1981. (6) M.Iura and M.Hirashima ; Proc.of JSCE,No.344/I-1,1984.
(7) H.Stumpf; ZAMM 63, T101-T103 (1983). (8) L.Nolte;ZAMM 63, T79-T82 (1983).