I-96　シェル構造物の有限変位解析に関する一数値解析

豊田高専　正会員　桜井孝昌
東京大学　正会員　西野文雄

1. まえがき　剛体変位除去の方法を用いてシェル構造物の有限変位解析を行う場合，変形前から剛体変位後までに有限な剛体回転を伴う．定式化を増分形ではなく，全体節点力－全体節点位置ベクトルを基本とする場合は，この有限回転角はベクトルとして取り扱えないため，繁雑な計算処理を行う必要が生じる．

本報告は，有限回転角を用いることなく，弾性シェルの有限変位解析を行う方法を示そうとするものである．

2. 薄板の剛性方程式　解析は有限要素法を用い，曲面を三角形板要素の集合として表わすため，Fig. 1に示す板要素を考える。変形前の板厚中央面内に直交単位ベクトル i_α ($\alpha=1,2$) をとり，板面の法線方向に単位ベクトル i_3 をとる。変形後の要素の節点を結んでできる平面内で，ベクトル i_i ($i=1,2,3$) に対応する直交単位ベクトルを $\bar{i}_i$ とする。変形後の節点 $\hat{N}$ の位置ベクトルを $\hat{X}^n$ と表わし，この点におけるベクトル $\bar{i}_i$ をそれぞれの軸のまわりに回転ベクトル $\hat{\theta}^n$ だけ回転すると，その点における接平面内の直交単位ベクトル $\hat{i}_\alpha^n$ および法線ベクトル $\hat{i}_3^n$ に一致するものとする．これ以後，ベクトル $\hat{i}_i^n$ を節点 $\hat{N}$ における接平面ベクトルと呼ぶ。なお，回転ベクトル $\hat{\theta}^n$ は微小であるのでベクトルとして扱うことができる。ベクトル $\hat{X}^n$ と $\hat{\theta}^n$ をベクトル $\bar{i}_i$ 成分で表わすと，

$$\hat{X}^n = \hat{X}_i^n \bar{i}_i , \quad \hat{\theta}^n = \hat{\theta}_i^n \bar{i}_i \qquad (1.a,b)$$

ここに，添字iのように，それらが2重に用いられている場合は総和規約を適用する。式(1)で表わしたベクトルを総称して Y^n と表わすと，

$$Y^n \equiv \langle \hat{X}^n, \hat{\theta}^n \rangle^T , \qquad (2)$$

ここに，添字記号Tは転置記号を表わす。ベクトル Y^n は一節点について全部で6成分あるが，添字nを一要素内の全ての節点数を表わすものとし，一要素内のベクトル $\bar{i}_i$ 系に関する全ての成分を $\{\bar{Y}\}_E$ と表わすと，

$$\{\bar{Y}\}_E = \langle \hat{X}_i^n , \hat{\theta}_i^n \rangle^T \qquad (3)$$

ベクトル成分 $\hat{X}_i^n$, $\hat{\theta}_i^n$ に対応する節点力成分をそれぞれ N_i^n, M_i^n とし，式(3)と同様にこれらのベクトル成分を $\{\bar{F}\}_E$ と表わすと，

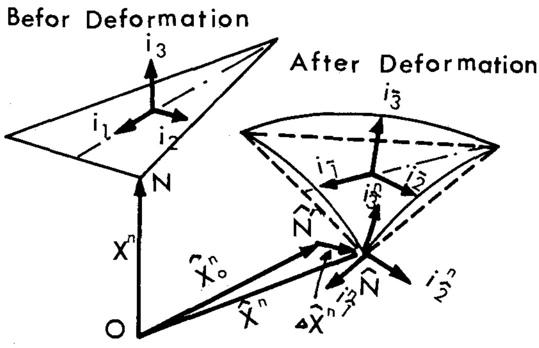

Fig. 1. 変形前，後の座標ベクトルおよび位置ベクトル

$$\{\bar{F}\}_E = \langle N_i^n, M_i^n \rangle^T \qquad (4)$$

座標ベクトル $\bar{i}_i$ 系に関する薄板のひずみ－位置ベクトル関係式を用いると，$\bar{i}_i$ 系に関する要素剛性方程式は，

$$\{\bar{F}\}_E = [\bar{K}]_E \{\bar{Y}\}_E + \{\bar{C}\}_E \qquad (5)$$

ここに，剛性行列 $[\bar{K}]_E$ は，$\bar{i}_i$ 系に関する微小変位問題の弾性剛性行列を用いても，幾何剛性行列を含む剛性行列を用いても，要素分割を細かくすることにより同一の解が得られる.[1] 行列 $\{\bar{C}\}_E$ はベクトル成分 $\{\bar{Y}\}_E$ として，変位ベクトルではなく位置ベクトルを用いたために生じた付加外力である．

式(5)における行列 $\{\bar{Y}\}_E$ のうち回転成分 $\hat{\theta}_i^n$ は，同一節点に対しても要素毎に異なった値となる。そこで，$\bar{i}_i$ 座標系に関する要素剛性方程式(5)を結合して全体剛性方程式を作るために，次に述べる手法を用いる。式(2)のベクトル Y^n を

$$Y^n = \Delta Y^n + Y_0^n \qquad (6\cdot a)$$

と表わす。ここに，ベクトル ΔY^n，Y_0^n は

$$\Delta Y^n = \langle \Delta\hat{X}^n, \Delta\hat{\theta}^n \rangle^T, \quad Y_0^n = \langle \hat{X}_0^n, \hat{\theta}_0^n \rangle^T \qquad (6\cdot b, c)$$

ここに，ベクトル $\hat{X}_0^n$ はFig. 1の点 O から，変形後の節点 $\hat{N}$ とわずかに異なる点 $\hat{N}'$ までの位置ベクトルを表わし，$\Delta\hat{X}^n$ は点 $\hat{N}'$ から点 $\hat{N}$ までの位置ベクトルを

表わす。ベクトル$\hat{\theta}_0^n$，$\Delta\hat{\theta}^n$もこれと同様に，変形後の節点$\hat{N}$において，座標ベクトル$\mathbf{i}_i$をそれぞれの軸の回りに$\hat{\theta}_0^n$回転すると，節点$\hat{N}$における接平面ベクトル$\mathbf{i}_i^n$とわずかに異なる直交単位ベクトル$\mathbf{i}_{0i}^n$に一致し，さらにベクトル$\mathbf{i}_{0i}^n$の回りに回軸ベクトル$\Delta\hat{\theta}^n$だけ回転するとベクトル$\mathbf{i}_i^n$に一致する回転ベクトルとする。

式(3)と同様の形式で，ベクトル$\Delta\mathbb{Y}^n$，$\mathbb{Y}_0^n$の$\mathbf{i}_i$成分を用いて式(6・a)を表わすと，

$$\{\bar{\mathbb{Y}}\}_E=\{\Delta\bar{\mathbb{Y}}\}_E+\{\bar{\mathbb{Y}}_0\}_E \qquad (7.a)$$

ここに，

$$\{\Delta\bar{\mathbb{Y}}\}_E=\langle\Delta\hat{X}_i^n,\Delta\hat{\theta}_i^n\rangle^T,\ \{\bar{\mathbb{Y}}_0\}_E=\langle\hat{X}_{0i}^n,\hat{\theta}_{0i}^n\rangle \qquad (7\cdot b,c)$$

式(7・a)を式(5)に代入すると，

$$\{\bar{\mathbb{F}}\}_E=[\bar{\mathbb{K}}]_E\{\Delta\bar{\mathbb{Y}}\}_E+\{\bar{\mathbb{F}}_0\}_E+\{\bar{\mathbb{C}}\}_E \qquad (8\cdot a)$$

ここに，付加外力$\{\bar{\mathbb{F}}_0\}_E$は

$$\{\bar{\mathbb{F}}_0\}_E=[\bar{\mathbb{K}}]_E\{\bar{\mathbb{Y}}_0\}_E \qquad (8\cdot b)$$

ベクトル$\mathbf{i}_i^n$と$\mathbf{i}_i$との座標変換行列を$[\mathbf{t}^n]$と表わすと，

$$\{\mathbf{i}_i^n\}=[\mathbf{t}^n]\{\mathbf{i}_i\} \qquad (9.a)$$

なお，行列$[\mathbf{t}^n]$は節点$\hat{N}$における回転ベクトル$\hat{\theta}^n$によって表わすことができる。節点$\hat{N}$における6個の変数を変換する変換行列を$[\mathbb{T}^n]$と表わすと，式(9・a)より，

$$[\mathbb{T}^n]=\begin{bmatrix}[\mathbf{t}^n] & 0\\ 0 & [\mathbf{t}^n]\end{bmatrix} \qquad (9\cdot b)$$

一つの三角形要素の要素変換行列を$[\mathbb{T}]_E$とすると，節点番号nが1，2，3に対して，

$$[\mathbb{T}]_E=\begin{bmatrix}[\mathbb{T}^1] & & 0\\ & [\mathbb{T}^2] & \\ 0 & & [\mathbb{T}^3]\end{bmatrix} \qquad (9\cdot c)$$

式(8・a)を変換行列$[\mathbb{T}]_E$で変換すると，

$$\{\mathbb{F}\}_E=[\mathbb{K}]_E\{\Delta\mathbb{Y}\}_E+\{\mathbb{F}_0\}_E+\{\mathbb{C}_E\} \qquad (10\cdot a)$$

ここに，$[\mathbb{K}]_E$，$\{\mathbb{F}\}_E$，…… は

$$[\mathbb{K}]_E=[\mathbb{T}]_E[\bar{\mathbb{K}}]_E[\mathbb{T}]_E^{-1},\ \{\mathbb{F}\}_E=[\mathbb{T}]_E\{\bar{\mathbb{F}}\}_E,\ \cdots\cdots \qquad (10\cdot b)$$

式(10・a)は節点毎に定められた接平面ベクトル$\mathbf{i}_i^n$座標系に変換された要素剛性方程式である。この式より，ベクトル成分$\{\Delta\mathbb{Y}\}_E$を節点における共通の変数として全体剛性方程式を作ると，

$$\{\mathbb{F}\}=[\mathbb{K}]\{\Delta\mathbb{Y}\}+\{\mathbb{F}_0\}+\{\mathbb{C}\} \qquad (11)$$

3. 境界条件　節点$\hat{N}$の位置ベクトル$\hat{\mathbb{X}}_0^n$，$\Delta\hat{\mathbb{X}}^n$および微小回転ベクトル$\Delta\hat{\theta}^n$を接平面ベクトル$\mathbf{i}_i^n$のスカラー成分で表わすと，

$$\Delta\hat{\mathbb{X}}^n=\Delta\hat{X}_i^n\mathbf{i}_i^n,\ \hat{\mathbb{X}}_0^n=\hat{X}_{0i}^n\mathbf{i}_i^n,\ \Delta\hat{\theta}^n=\Delta\hat{\theta}_i^n\mathbf{i}_i^n \qquad (12a\sim c)$$

ただし，式(12)において上添字nについては総和規約を適用しない。変形後の境界線上の節点$\hat{N}$における強制接平面ベクトルおよび強制位置ベクトルをそれぞれ$\mathbf{i}_i^B$，$\mathbb{X}^B$とし，ベクトル$\mathbb{X}^B$を$\mathbf{i}_i^B$成分で

$$\mathbb{X}^B=X_i^B\mathbf{i}_i^B \qquad (13)$$

と表わす。境界線上の接平面ベクトルおよび位置ベクトルをそれぞれ，

$$\mathbf{i}_{0i}^n=\mathbf{i}_i^B,\quad X_{0i}^n=X_i^B \qquad (14a,b)$$

と与えると，変形後の節点における曲面の方向および位置に関する幾何学的境界条件は，

$$\Delta\hat{\theta}_i^n=0,\quad \Delta\hat{X}_i^n=0 \qquad (15a,b)$$

節点$\hat{N}$における力およびモーメントを$\mathbb{N}^n$，$\mathbb{M}^n$とし，これらを接平面ベクトル$\mathbf{i}_i^n$の成分で表わすと，

$$\mathbb{N}=N_i^n\mathbf{i}_i^n,\ \mathbb{M}=M_i^n\mathbf{i}_i^n \qquad (16a,b)$$

ただし，式(16)における添字nには総和規約を適用しない。境界線上の節点に作用している外力ベクトルのうち，力およびモーメントに関するベクトルをそれぞれ$\mathbb{N}^B$，$\mathbb{M}^B$と表わし，これらを境界線上の節点における接平面ベクトル$\mathbf{i}_i^B$の成分で表わすと，

$$\mathbb{N}^B=N_i^B\mathbf{i}_i^B,\ \mathbb{M}^B=M_i^B\mathbf{i}_i^B \qquad (17a,b)$$

式(16)，(17)より，力学的境界条件は，

$$\begin{Bmatrix}N_i^n\\ M_i^n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}N_i^B\\ M_i^B\end{Bmatrix} \qquad (18)$$

4. あとがき　与えられた境界条件のもとで，式(11)を逐次代入法により解き，ベクトル成分$\{\Delta\mathbb{Y}\}$が零に収束するとき，$\hat{\mathbb{X}}_0^n$および$\mathbf{i}_{0i}^n$が節点$\hat{N}$の位置ベクトルおよびその節点における接平面の方向を表わすベクトルとなる。

以上述べた方法を用いれば，全荷重－全節点位置を基本とする剛性方程式を，有限回転角を用いることなく解析することができる。

以上

参考文献

1) Nishino F. Ikeda T. Sakurai T. and Hasegawa A. : A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, PROC. of JSCE No.344 Apr. 1984