# I-94　有限帯板法による矩形平板の混合境界問題解析について


北海道大学　正員　能町　純雄
北海道開発局　正員　西本　　聡
北海道大学　学生員　久保　賀也
北海道大学　正員　角田与史雄


## 1．まえがき

有限帯板法は、構造物を帯状要素の集合とみなし、仮想的に帯状に分割し、それぞれの要素に対して成立する方程式を全体系に拡長し、これを解くことにより変位，断面力等を求める解析方法である。

一般に、有限帯板法では、帯板要素の長辺方向の変位をフーリエ級数の形で表わすので、長辺の両端において単純支持条件を満足することになる。両端固定の解析例もあるが、その他の支持条件に対しては解析がなされていない。本報告においては、長辺の両端において固定や自由等単純支持以外の境界条件を考慮できる有限帯板法の開発を目的とし種々の支持条件の平板の曲げについて数例の計算を行った。

## 2．帯板要素の変位

矩形板を $n$ 個の帯板要素に分割し、境界上の辺の番号を、0, 1, ･･･, n −1, n を付け、第r 番目の辺のたわみを $w_r$，たわみ角 $\theta_r$ とし (図-1 参照)、$y$ 方向には 3 次式の変位を仮定すると、次のように表わすことができる。

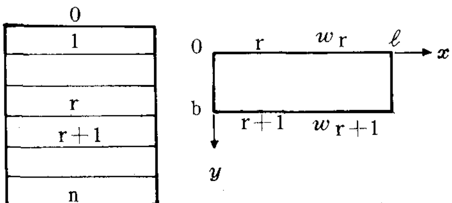


図-1　帯板要素

$$w(x,y)=(1-3\eta^2+2\eta^3)\,w_r(x)+b(\eta-2\eta^2+\eta^3)\,\theta_r(x)+(3\eta^2-2\eta^3)\,w_{r+1}(x)+b(-\eta^2+\eta^3)\,\theta_{r+1}(x) \tag{1}$$

ただし、$\eta=y/b$ で要素の長辺の長さ ($x$ 方向) を $\ell$、短辺の長さ ($y$ 方向) を $b$ とする。

本報告においては、$x=0$ , $\ell$ における種々の境界条件を考慮するため、$w_{r(x=0)}=w_r^0$, $w_{r(x=\ell)}=w_r^\ell$, $\theta_{r(x=0)}=\theta_r^0$, $\theta_{r(x=\ell)}=\theta_r^\ell$, $w_{r(x=0)}=\ddot{w}_r^0$, $w_{r(x=\ell)}=\ddot{w}_r^\ell$ とし、式 (1) 中、次のように仮定する。ここで、$\xi=x/\ell$ とすれば、

$$\begin{aligned} w_r(x)&=\sum_m W_m^r\sin(m\pi\xi)+(1-\xi)\,w_r^0+\xi w_r^\ell-\frac{\ell^2}{6}\xi(1-\xi)(2-\xi)\,\ddot{w}_r^0-\frac{\ell^2}{6}\xi(1-\xi^2)\,\ddot{w}_r^\ell \\ &=\sum_m\{W_m^r+\frac{2}{m\pi}w_r^0-\frac{2}{m\pi}(-1)^m w_r^\ell-\frac{2\ell^2}{(m\pi)^3}\ddot{w}_r^0+\frac{2\ell^2}{(m\pi)^3}(-1)^m\ddot{w}_r^\ell\}\sin(m\pi\xi) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \theta_r(x)&=\sum_m\theta_m^r\sin(m\pi\xi)+(1-\xi)\,\theta_r^0+\xi\theta_r^\ell \\ &=\sum_m\{\theta_m^r+\frac{2}{m\pi}\theta_r^0-\frac{2}{m\pi}(-1)^m\theta_r^\ell\}\sin(m\pi\xi) \end{aligned} \tag{3}$$

## 3．一般式の誘導

平板の全ひずみエネルギー $U$ は、次のとおりである。

$$U=\frac{D}{2}\int_A\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dA \tag{4}$$

ここに、$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$

式(4)を境界の変位で変分すれば、カステリアノの定理により対応する反力が求められる。この計算結果を表示すれば、次のようである。

$$\begin{Bmatrix} Q_m^{r,r+1} \\ M_m^{r,r+1} \\ Q_m^{r+1,r} \\ M_m^{r+1,r} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \quad K_1 \quad \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_m^r \\ \theta_m^r \\ W_m^{r+1} \\ \theta_m^{r+1} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \quad K_2 \quad \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_r^0 \\ \theta_r^0 \\ w_{r+1}^0 \\ \theta_{r+1}^0 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \quad K_3 \quad \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{w}_r^0 \\ \ddot{w}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$
\begin{Bmatrix} Q_0^{r,r+1} \\ M_0^{r,r+1} \\ Q_0^{r+1,r} \\ M_0^{r+1,r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K_1' & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m^r \\ \theta_m^r \\ W_m^{r+1} \\ \theta_m^{r+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & K_3' & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_r^0 \\ \ddot{w}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} \tag{6}
$$

4．長辺端の境界条件

（1） $x=0$で固定

$$
\dot{w}_r^0=0\ ,\ \theta_r^0=0\ ,\ \left.\frac{\partial w_r}{\partial x}\right)_{x=0}=0 \tag{7}
$$

（2） $x=0$で自由

$$
Q^0_{r,r-1}+Q^0_{r,r+1}=0\ ,\ M^0_{r,r-1}+M^0_{r,r+1}=0\ ,\ \ddot{w}_r^0=-\frac{\nu}{b^2}\left(w^0_{r-1}-2w^0_r+w^0_{r+1}\right) \tag{8}
$$

5．数値計算例

数値計算例として、一辺が$\ell$の正方形板に等分布荷重$q$を担った場合を取り扱った。境界条件としてカンチレバーと四辺自由四隅支持の場合を扱い、ポアソン比$\nu$は0.3 を取り、級数の項数$m$は 4 00 項取り、帯板要素の分割数$n$を20 個取り計算した。

この計算結果は、図-2,表-1及び図-3，表-2に示した。なお、表-2 には既往の研究による参考値を示した。ここでは、$M_{(x または y)sr}$は$y$または$x$方向と直角方向に働く$x=$s,r 番目の境界上の点の曲げモーメントを表わし、$R$は反力を表わし、また$w$はたわみを表わしている。

表-2 によれば、この計算値は参考値に非常に近い値を示している。

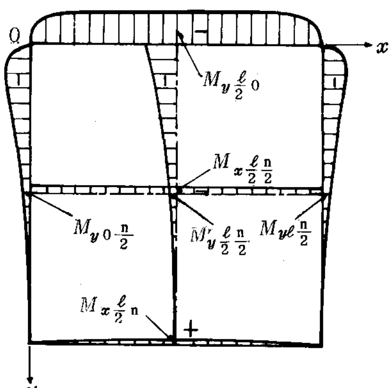


図-2　カンチレバー平板

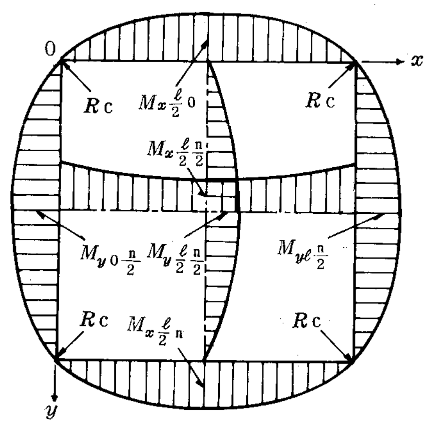


図-3　四辺自由四隅支持平板

表-1　カンチレバー平板の計算値

| | 計算値 | | | 計算値 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $W_{\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$ | 0.0458 | $\frac{q\ell^4}{D}$ | $M_{y\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$ | -0.1224 | $q\ell^2$ |
| $W_{\frac{\ell}{2}n}$ | 0.1291 | | $M_{y\frac{\ell}{2}0}$ | -0.5305 | |
| $M_{x\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$ | -0.0235 | $q\ell^2$ | $M_{y0\frac{n}{2}}$ | -0.1297 | |
| $M_{x\frac{\ell}{2}n}$ | 0.0152 | | $R_{\frac{\ell}{2}0}$ | 1.169 | $q\ell$ |

表-2　四辺自由四隅支持平板の計算値及び参考値

| | 計算値 | 参考値* | | | 計算値 | 参考値* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_{\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$ | 0.02551 | 0.0249 | $\frac{q\ell^4}{D}$ | $M_{x\frac{\ell}{2}0}$ | 0.1508 | 0.1404 | $q\ell^2$ |
| $W_{\frac{\ell}{2}0}$ | 0.01780 | ―――― | | $M_{y\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$ | 0.1140 | 0.1090 | |
| $W_{0\frac{n}{2}}$ | 0.01771 | ―――― | | $M_{y0\frac{n}{2}}$ | 0.1499 | 0.1404 | |
| $M_{x\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$ | 0.1120 | 0.1090 | $q\ell^2$ | $R_C$ | 0.250 | 0.250 | |

参考値*：Richard Bareś,"Berechnungstafeln für Platten und Wandschben, Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphrams based on the Elastic Theory", Bauverlag GmbH.