

東京大学 学生員 元橋 一之 東京大学 正員 長谷川彰夫
 東京大学 正員 西野 文雄 東京大学 K. K. Liyanage

1. まえがき 単一部材のそりねじれを含む立体挙動に関しては、既に数多くの成果があり、必要であれば、設計に役立てることも可能である。しかし、立体骨組構造物の解析を、そりねじれの自由度も含めて行なうことを考えたとき、部材交叉部などの軸線が不連続になる点（以下、不連続とよぶ）でのそりモーメントとねじれ率の隣接部材相互の変換を用いる必要がある。この変換関係については、一応の結果が既にあるものの¹⁾、誘導に不正確な点もあり、広く認められるに至っていない。ここでは同様に円弧梁要素を仮想的に挿入するものの、剛性方程式の誘導を含む独立の定式化を行ない、そりねじれ量の変換関係を求める。

2. 問題設定 一点で交叉する2本の部材を軸線不連続な断面で切断し、Fig. 1 にしめす内力のみを考える。部材Aの断面*i*と部材Bの断面*j*において、それぞれ定義される内力の変換を次のように与える。

$$\begin{bmatrix} V_j \\ M_{Zj} \\ T_j \\ M_{\omega j} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} V_i \\ M_{Zi} \\ T_i \\ M_{\omega i} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} w_j \\ -w_j \\ \phi_j \\ -\phi_j \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} w_i \\ -w_i \\ \phi_i \\ -\phi_i \end{bmatrix} \quad (1 a, b)$$

この変換行列を求めることが、ここでの目的となる。そのための解析方法としてFig. 2のように、切断した両部材間に仮想的に円弧部材を挿入することを考える。そのうえで、この円弧梁の剛性マトリクスを導き円弧梁の中心角である θ を一定にしながら曲率半径*r*及び円弧長を限りなく0に近づけるという極限操作を行なうことによって、両端のそりモーメント及びねじれ率の関係を導いた。

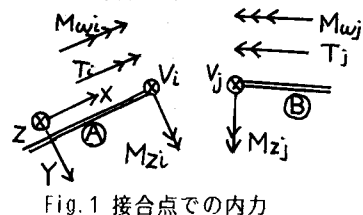


Fig. 1 接合点での内力

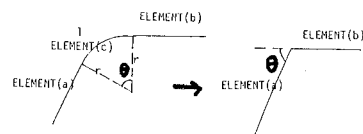


Fig. 2 円弧梁の挿入

3. 円弧梁の剛性マトリクス 文献2)によれば、円弧梁の変位表示の支配方程式は、以下のように与えられている。

$$\begin{aligned} EI_{zz}(-w'''' - \frac{\phi'''}{r}) - EI_{\omega\omega}(\frac{w'''}{r^2} - \frac{\phi'''}{r}) - GJ(\frac{\phi''}{r} - \frac{w''}{r^2}) &= 0 \\ EI_{\omega\omega}(\frac{w'''}{r} - \phi''') + GJ(\phi'' - \frac{w''}{r}) + EI_{zz}(-\frac{w''}{r} - \frac{\phi''}{r^2}) &= 0 \end{aligned} \quad (2 a, b)$$

$$x = 0, l \text{ で}$$

$$(3 a, b, c, d)$$

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \text{ or } n \times \{ M_z' - (\frac{M_{\omega}}{r} + \frac{T}{r}) \} = \bar{V}_z & -w' &= \bar{\lambda}_z \text{ or } n \times M_z = \bar{M}_z \\ \phi &= \bar{\phi} \text{ or } n \times (M_{\omega}' + T) = \bar{T} & \frac{w'}{r} - \phi' &= \bar{\lambda}_{\omega} \text{ or } n \times M_{\omega} = \bar{M}_{\omega} \end{aligned}$$

ここに ()' は、*x* に関する微分を示す。変位 *w*, ϕ を変位の境界条件を満たすように、*x* の3次関数で近似すると、以下のように書き表わすことができる。

$$\begin{aligned} w &= \phi_1 v_0 - \phi_2 v_0' + \phi_3 v_0'' - \phi_4 v_0''' \\ \phi &= -\phi_2 v_0' / r - \phi_4 v_0'' / r + \phi_1 \phi_0 - \phi_2 \phi_0' + \phi_3 \phi_0'' - \phi_4 \phi_0''' \end{aligned} \quad (4 a, b)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3 & \phi_2 &= x - 2x(x/l) + 3x(x/l)^2 \\ \phi_3 &= 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 & \phi_4 &= -x(x/l) + x(x/l)^2 \end{aligned} \quad (5 a, b)$$

式(2)の微分方程式、式(3)の境界条件に対応するGalerkin法の支配方程式は次のように与えられる。

$$\int_0^l F w \delta w dx + \int_0^l F \phi \delta \phi dx + [M_z' - (\frac{M_w'}{r} + \frac{T}{r}) - \bar{V} z]_0^l \delta w + [M_z - \bar{M}_z]_0^l \delta(-w') + [M_w' + T - \bar{T}]_0^l \delta \phi + [M_w - \bar{M}_w] \delta(\frac{w'}{r} - \phi) = 0 \quad (6)$$

式(6)に式(4)(5)の変位関数を代入し、計算すると、次の円弧梁の剛性方程式を得ることができる。

$$P = K \cdot v \quad (7)$$

ただし

$$P = \{V_i, M_{zi}, T_i, M_{\omega i}, V_j, M_{zj}, T_j, M_{\omega j}\}^t$$

$$v = \{w_i, -w_i', \phi_i, -\phi_i', w_j, -w_j', \phi_j, -\phi_j'\}^t$$

ここに、Kは円弧梁の剛性マトリクス(8×8)で、各要素は、曲率半径rと円弧長lの関数になっている。

4. 力および変位の変換マトリクス 式(1)で定義した力および変位の変換式のうち、せん断力、曲げモーメント、ねじれモーメント及びそれらの対応変位の変換は、ベクトルの変換に従うことが明らかなので、式(8a)の断面力成分をθの3次の項までテーラー展開すれば、式(9)が成立する。(8a, b)

$$\begin{bmatrix} V_j \\ M_{zj} \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ M_{zi} \\ T_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W_j \\ -W_j' \\ \phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ -W_i' \\ \phi_i \end{bmatrix}$$

$$V_j = V_i \quad M_{zj} = (1 - \theta^2/2) M_{zi} + (\theta - \theta^3/6) T_i \quad (9a, b, c)$$

$$T_j = -(\theta - \theta^3/6) M_{zi} + (1 - \theta^2/2) T_i$$

式(8b)の変位成分についても同様に展開し、この結果と式(7)で求めた剛性マトリクスKについて、 $l/r = \theta = \text{const}$ に注目しながら、rとlを限りなく0に近づけたときの節点力と節点変位の関係から、そりモーメントとねじれ率に関する次の関係が導かれる。

$$M_{\omega i} = M_{\omega j} \quad -\phi_i' = -\phi_j' \quad (10a, b)$$

ただし、ここでは式(9)に示したように、モーメント・回転角の変換に対し、θの3次の項までを考えたため、そりモーメントと、ねじれ率に関してもθの3次の項までの一致をもって、式(10)を結論した。

5. 変換マトリクスの物理的検討 式(8)と式(10)から確定する式(1)の4×4の変換マトリクスTは、直交マトリクスである。 $\{V_i, M_{zi}, T_i, M_{\omega i}\}^t$ から $\{V_j, M_{zj}, T_j, M_{\omega j}\}^t$ へ変換する操作Tと $\{V_j, M_{zj}, T_j, M_{\omega j}\}^t$ から $\{V_i, M_{zi}, T_i, M_{\omega i}\}^t$ へ変換する操作 T^{-1} は物理的には、θの符号のみを変えることをに相当し、このことから $T^{-1} = T^t$ すなわちTは直交行列とならなければいけない。

6. まとめ 部材軸方向が不連続に変化する薄肉断面部材において、そりモーメント及びねじれ率は保存される。すなわち、そりモーメントとねじれ率は方向による変化をうけず、スカラーとしてあつかわれる。これは文献1)の結果を確認するものである。この変換関係を用いると、直線部材からなる立体骨組構造物のみならず、曲線部材を含む場合でも直線近似を行なうことで、そりねじれの自由度を含む解析が容易に可能である。

参考文献 1) Zdenek P. Bazant etc. Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames Journal of the Engineering Mechanics Division 1973年 2) 岡本 舜三編 鋼構造の研究 奥村敏恵教授還暦記念、1977年