

名古屋工業大学 正員 後藤 芳顯
 東京大学 正員 長谷川 彰夫
 東京大学 正員 西野 文雄

1. まえがき: 構造物の有限変位解析における剛体変位除去の手法は、離散化解析での定式化が比較的容易で、しかも大きな変位挙動まで追跡しうするため、この種の実用解析では最も多く用いられている。とくに、立体骨組に関しては、大きな変位の領域も直接Lagrangeの手法で解析する場合、基本式が平面骨組の場合と比較して、かなり複雑になるため、ほとんど剛体変位除去の手法で定式化がなされているのが現状である。しかしながら、剛体変位除去の手法では、剛体変位除去後の変位成分を評価する式として、一般に、変位が小さいことを前提とした近似式が用いられているので、その理論的根拠は、著者らが証明した平面骨組構造を除いて、必ずしも明らかでない。本報告では、平面骨組に関する議論とさらに発展させ、立体骨組構造の解析に剛体変位除去の手法と適用した場合の解の性質とLagrange表現の支配微分方程式の解と比較することにより明らかにする。なお、ここでは簡単のため、立体骨組は、2軸対称の充実直線材より成っているものとする。

2. Lagrange表現の支配方程式: 周知のように、立体骨組要素では、大きな変位まで扱うLagrange表現の支配方程式を、空間に固定された座標方向の成分で記述すると非常に複雑となり、精度検討に用いる各物理量に関するべき級数表示の離散化式を求めるのは容易でない。したがって、ここでは基本式の簡素化を目的として、Love²⁾が軸線不伸張のRodの定式化に用いたように、Fig. 1に示す変形後の材料軸線上の基底ベクトルを基準化した単位ベクトル($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$)方向の力学成分と、次式で定義される変形成分($K_x, K_y, \tau, \sqrt{g_0}$)を用いて支配方程式を記述する。

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0, \tau, -K_y \\ -\tau, 0, K_x \\ K_y, -K_x, 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} \quad \hat{g}_z = \sqrt{g_0} \cdot \hat{e}_z \quad (1a, b)$$

ここに、 K_x, K_y は曲率、 τ はねじり率、 $\sqrt{g_0}$ はのび率にそれぞれ相当する量であり、 $\hat{g}_z$ は基底ベクトル $\hat{e}_z$ の変形後である。以上の方法で求めた支配方程式をTable 1に示す。a)はBernoulli-Eulerの仮定を導入した変位場と、微小ひずみの条件のもとに仮想仕事の原理から求めた式であり、b)はLoveの式に軸力と軸ひずみの関係を付加したものである。Loveの式では、つり合い式は幾可学的考察により、また断面力と変形成分の関係は、単に(M_x, M_y, M_z, N)が($K_y, K_x, \tau, \sqrt{g_0}-1$)に比例すると仮定して求められている。

3. 剛体変位除去の手法の支配方程式: 剛体変位除去の手法で用いられる有限要素 $i, i+1$ の局所座標($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)と物理量の局所成分とFig. 2に示す。この局所座標は節点 i の剛体変位とともに移動し、 i 節点でのベクトル($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$)を基底ベクトルとする直交直線座標である。剛体変位除去後の成分に関する $i, i+1$ 区間の低次非線形の支配方程式としては、Table 2に示すものを検討対象とする。c)は西野らによって導かれた式で、

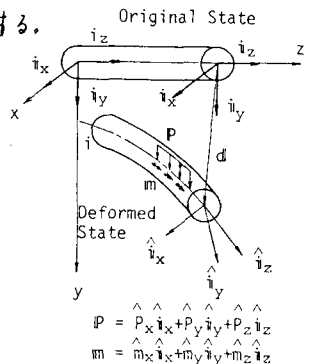


Fig.1 Coordinate Systems for Direct Lagrangian Expressions

Table 1. Direct Lagrangian Expressions

Equilibrium Equations	
$V'_x - V_y \tau + N K_y + \hat{P}_x = 0, \quad V'_y + V_x \tau - N K_x + \hat{P}_y = 0$ $N' + V_y K_x - V_x K_y + \hat{P}_z = 0, \quad M'_z - M_y K_y - M_x K_x + \hat{m}_z = 0$ where $V_x = M'_x - M_y \tau + M_z K_x - \hat{m}_y, \quad V_y = M'_y + M_x \tau + M_z K_y - \hat{m}_x$	
Theories	Stress Resultants vs $K_x, K_y, \tau, \sqrt{g_0}$
a) Small Strains with Finite Displacements	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M_y = EI_y K_x, \quad M_x = -EI_x K_y$ $M_z = GJ\tau + EJ(\sqrt{g_0} - 1) + EJ\tau\tau^2/2$
b) Theory by Love ²⁾	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M_y = EI_y K_x, \quad M_x = -EI_x K_y, \quad M_z = GJ\tau$

$$A = \int_A dA \quad I_x = \int_A x^2 dA \quad I_y = \int_A y^2 dA \quad J = \int_A x^2 + y^2 dA \quad J_{\tau\tau} = \int_A (x^2 + y^2)^2 dA$$

このレベルの式では比較的精度が良いと考えられている。また、d)は、はり・柱の式、e)は微小変位の式であり、剛体変位除去の手法による立体骨組の解析では、一般的なものである。なお、Table 2の物理量のうち、 $\hat{u}$ は変形後の部材軸線まわり、また $\hat{x}$ は $\hat{z}$ 軸まわりの、それぞれ微小回転を表わし、 $(\hat{M}_y, -\hat{M}_x, \hat{M}_z)$ は $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 軸まわりのモーメント成分と意味する。これらの物理量の定義は4で述べる精度の見地から、これが向上するように定めた。

4. 剛体変位除去の手法の精度：有限要素の各節点における剛体回転が正しく評価されることを前提に、Lagrange 表現の支配方程式、および剛体変位除去の手法の支配方程式から、文献1)の方法に準じ、物理量として、 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 方向の変位成分、 $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ の $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 座標に対する方向余弦、およびモーメント $(\hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{M}_z)$ の $\hat{z}$ に関するべき級数表示の解と導びく。そして両手法間のべき級数係数の一貫性を調べることにし、精度を検討する。なお、剛体回転除去後の回転は微小回転と見なせるので、剛体変位除去の手法での方向余弦の評価は線形式による。また、モーメントを除く断面力の $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 成分については、そのつり合い式に全く変形が関与せず、両手法間の展開式が完全に一致するのが明らかであるので、検討を省いている。

要素長無限小での剛体変位除去の手法の収束解は、各物理成分のべき級数展開式の1次の係数から明らかになる。すなわち、c)式を用いる場合には、a)微小ひずみの有限変位の式の解に、d), e)式の場合は、b) Love の式の解に収束することが判明した。d), e)式を用いる場合、a)の解に収束しないのは、Bernoulli-Eulerの仮定のもとでも、軸線上以外の断面内では、ねじりによって、変形後の基底ベクトル $\hat{g}_i$ が断面と直交せず、軸方向の応力テンソル成分が、ねじりモーメントに関係するため、d), e)のようなねじりモーメントとねじり角の線形の関係式を用いている限り、剛体回転の除去だけでは、この効果を考慮できないからである。

精度については、剛体変位除去の手法による展開式の1次以上の係数が収束解となるLagrange 表現の支配方程式によるものといかに一致するかを調べれば良い。各場合について、物理量の一致する最高次数とTable 3に示す。これより、軸線の伸張を考える通常の場合は、いずれも収束解に対して、1次の近似解としての保証しかないといえる。また、平面骨組に比べ、変位成分以外の精度は全般に低下している。軸線の伸張が無視できる場合には、変位成分の精度は向上するが、これ以外の成分の精度に変化はなく、物理成分全体で見れば、平面骨組のように2次の近似解とはならないことがわかる。

参考文献：1)後藤、長谷川、西野：平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察、土木学会論文報告集、No.331。2) Love, A. E. H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover. 3) Nishino, F. et al. : Variational Formulation of Stability Problem for Thin-Walled Members, Ingenieur-Archiv 43。

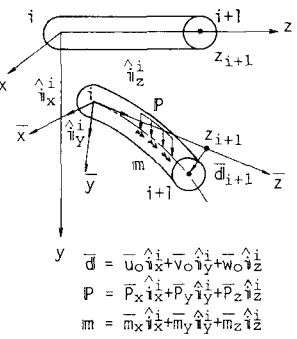


Fig.2 Coordinate Systems for the Separation of Rigid Body Displacements

Table 2. Expressions with Separation of Rigid Body Displacements

Theories	Equilibrium Equations	Stress Resultants vs. Displacements
c) Theory by Nishino ³⁾	$(N\hat{u}_0 + (M_x - M_y\hat{\phi})' - \hat{m}_y)' + \hat{P}_x = 0$ $(N\hat{v}_0 + (M_y + M_x\hat{\phi})' + \hat{m}_x)' + \hat{P}_y = 0$ $N' + \hat{P}_z = 0$ $M_z + M_x\hat{v}_0 - M_y\hat{u}_0 + \hat{m}_z = 0$	$N = EA(\hat{w}_0^2 + (\hat{u}_0^2 + \hat{v}_0^2)/2) + EJ\hat{\phi}'^2/2$ $M_y = -EI_y(\hat{v}_0'' - \hat{u}_0\hat{\phi}')'$ $M_x = -EI_x(\hat{u}_0'' + \hat{v}_0\hat{\phi}')'$ $M_z = GJ\hat{\phi}'' + E[J(\hat{w}_0' + (\hat{u}_0^2 + \hat{v}_0^2)/2) + J_{xz}\hat{\phi}']^2/2\hat{\phi}'$
d) Beam-Column	$(N\hat{u}_0 + \hat{M}_x - \hat{m}_y)' + \hat{P}_x = 0$ $(N\hat{v}_0 + \hat{M}_y + \hat{m}_x)' + \hat{P}_y = 0$ $N' + \hat{P}_z = 0$ $\hat{M}_z + \hat{m}_z = 0$	$N = EA(\hat{w}_0^2 + (\hat{u}_0^2 + \hat{v}_0^2)/2)$ $\hat{M}_y = -EI_y\hat{v}_0''$ $\hat{M}_x = -EI_x\hat{u}_0''$ $\hat{M}_z = GJ\hat{\phi}''$
e) Small Displacements	$(\hat{M}_x - \hat{m}_y)' + \hat{P}_x = 0$ $(\hat{M}_y + \hat{m}_x)' + \hat{P}_y = 0$ $N' + \hat{P}_z = 0$ $\hat{M}_z + \hat{m}_z = 0$	$N = EA\hat{w}_0$ $\hat{M}_y = -EI_y\hat{v}_0''$ $\hat{M}_x = -EI_x\hat{u}_0''$ $\hat{M}_z = GJ\hat{\phi}''$

Table 3. Coincidence of the Order of Derivatives

	For Small Strains with Finite Displacement	For the Theory of Love ²⁾
	c)	d) e)
$\hat{u}_0$	1(2)	1(2) 1(2)
$\hat{v}_0$	1(2)	1(2) 1(2)
$\hat{w}_0$	1(3)	1(3) 1(2)
$\hat{M}_x$	2	2 1
$\hat{M}_y$	2	2 1
$\hat{M}_z$	1	1 1
$[L]$	1	1 1

[L]: Directional Cosine
(·): For inextensional deformation of Axis