

熊本大学工学部	正員	三池亮次
熊本大学工学部	正員	小林一郎
佐藤工業株式会社	○正員	久保祐次

1. まえがき エネルギー理論に基づく有限変位理論には、数多くの研究成果が発表されている。本報告では、Lagrange-Euler併用形での割線増分形エネルギー基礎式を示し、接続マトリックスを用いて、変位法によって定式化して、次に示す本研究の特徴の検証の為に2.3のモデルを解析した。

(1) ひずみ増分は、Greenひずみ増分と回転ひずみ増分の和として、大きく変位する系の解析における、この回転ひずみ増分の効果について考える。

(2) 曲げモーメントのかかる部材については、その形状を3次曲線で近似し、直線近似が不可能な長い部材要素への解析を試みる。

2. 有限変位仮想仕事の原理 物体内部の任意点 $\mathbf{x}$ において、物体力 $\mathbf{f}$ 、境界において表面力 $\mathbf{p}$ を受けて、変形の中間位置 $\mathbf{x}'$ からの有限変位 $\Delta u$ を生じて釣合った状態にあり、その内部の任意点のKirchhoff応力が $\mathbf{T}_K$ で、それに対応する一種のひずみテンソル増分が $\Delta E_K$ であるとき、外力 $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{p}$ の $\Delta u$ に対する仮想仕事の積分 $\Delta W$ は、 $\mathbf{T}_K$ が $\Delta E_K$ に対して満たす仮想仕事の物体内部の全領域にわたる積分 $\Delta U$ に等しい。すなわち、

$$\Delta W = \int_A P^* \Delta u dA + \int_V f^* \Delta u dv' = \int_V \text{trace}(\mathbf{T}_K \Delta E_K) dv' = \Delta U \quad (1)$$

ここに、 $dA$ 、 $dv'$ は中間状態に換算された面積および体積要素である。また、ひずみテンソル増分 $\Delta E_K$ は、Greenひずみテンソル増分 $\Delta E_g$ と、回転を示す $(\frac{\partial u}{\partial x})^T \frac{\partial u}{\partial x}$ の和と定義される。すなわち、

$$\Delta E_K = \Delta E_g + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

2次元骨組構造で、軸力 $N + \Delta N$ 、および曲げモーメント $M + \Delta M$ が働き、平面保持の法則に従い、変形後に、部材軸方向直応力 $\sigma_{II}$ のみが生じる場合を考えると、式(1)の $\Delta U$ は、

$$\Delta U = \int_L \left[ \left\{ \frac{\Delta N}{EA} + (1 - \cos \theta) \right\} (N + \Delta N) + \frac{\Delta M}{EI} (M + \Delta M) \right] ds \quad (3)$$

3. 定式化 節点外力増分を $\Delta p$ 、節点変位増分を $\Delta d$ 、部材端力ベクトルを $p_m + \Delta p_m$ とすると、式(1)は、

$$(p + \Delta p)^T \Delta d = (p_m + \Delta p_m) \Delta e_m \quad (4) \quad \Delta e_m = \Delta e'_m - \Delta e_0$$

となり、接続マトリックス $C + \Delta C$ を用いて、変位法に従い、中間状態を基準とした変形後の釣合式、すなわち、本法の一般式は、

$$\Delta p = (C + \Delta C) K_m (C + \Delta C)^T \Delta d + (C + \Delta C) K_m \Delta e_0 + \Delta C p_m \quad (5)$$

ここに、 $K_m$ は弾性変形ベクトル増分 $\Delta e_m$ と $\Delta p_m$ との間の剛性マトリックス、 $\Delta e_0$ は回転変形ベクトル増分である。

4. 部材座標系 任意部材の両端の中央点を結んだ直線を横方向座標 $s$ として、それと垂直に $\eta$ 座標軸とする。曲線部材については、部材の任意点 $s$ の座標 $(\xi, \eta)$ を、長さ方向の座標 $s$ を用いて次のよう仮定する。

$$\xi = a_1 s, \quad \eta = b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \quad (6)$$

ここで、 $a_1, b_1, b_2, b_3$ は、部材両端の境界条件によって求められる係数である。

次に、任意断面力 $p_{ms} + \Delta p_{ms}$ と部材端力（両端を①、②として、端側の断面力） $p_{m1} + \Delta p_{m1}$ の関係を式(6)によつて、平衡マトリックス $H_{S2}$ を用いて次のように表わす。

$$(p_{ms} + \Delta p_{ms}) + H_{S2} (p_{m2} + \Delta p_{m2}) = 0 \quad (7)$$

よって、部材剛性マトリックス $K_m$ は、任意断面の下のみ性マトリックスを $K$ とするとき、次のように表わされる。

$$K_{mi} = \left[ \int_L H_{is2}^T F_e H_{is2} ds \right]^{-1} \quad (8)$$

又、部材回転変形ベクトル  $\Delta \theta_{Bi}$  は、任意断面回転ひずみベクトルを  $\Delta \theta_B = [(1 - \cos \alpha B) \ 0 \ 0]$  とすると、

$$\Delta \theta_{Bi} = \int_L H_{is2}^T \Delta \theta_B ds \quad (9)$$

となる。

5. 数値計算。まず、回転ひずみの影響があるトラス部材に限定して図-1のトラスドームの解析を行ない、回転を考慮した本解析法の適用性の検証をした。なお、結果の照査には、本モデルの構造及び荷重の対称条件を満足し、最も信頼できる結果を与えていた（図-2）文献2）を用いる。図-2にその解析結果を示す。なお、解析手法としては変位制御法を用いた。

図-2より、本解析結果が文献2）と非常によく一致しているのがわかる。さうに、変位増分が1cmという荷重制御法で求めるのは不可能と思われる平衡状態を一気に与えた場合も、たどりが小さい場合の平均収束回数と同じ回数で収束した。

○次に、曲線部材での解析モデルと（図-3）に示すエラスティカの解析を行なう。部材形状の3次式近似と、変位が大きい場合の回転ひずみの効果について考察を試みた。結果の照査には、千モニエンコの積分積分法を用いる。又、同図に8分割での解析結果を示す。

解析結果は分割数を大きくする程、積分積分法に近づいたが、図への分割程度でも十分有効な解が得られる。さらに、8分割で増分荷重を大きくした場合でも、変形の大きくなる区間では、最大反復回数が平衡状態には達していないが、他の点では一応平衡状態に達しているものと思われる。

6. おわりに。(1)回転による見かけのひずみ増分  $\Delta \theta_B$  を考慮することによって骨組構造物の解析において、剛体回転が大きくなつた場合でも解が収束し、有効な解を得ることができた。

(2)曲線部材の形状を3次式に近似することにより、剛結構造の解析において、少ない分割数で十分有効な解を得ることができた。これにより計算時間の大掛かり縮減が可能になった。

(3)トラス構造における本理論を用いて変位制御法では、荷重制御法では求められなかった不安定領域へ収束解を精度良く求めることができた。

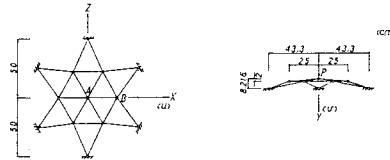


図-1 トラスドーム（文献2）より引用）

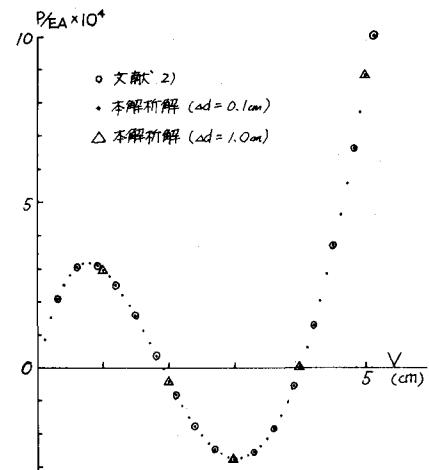


図-2 中央点Aの荷重-鉛直方向変位曲線

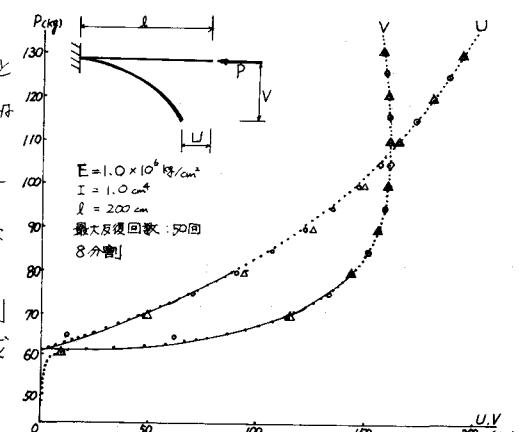


図-3 エラスティカヒヤの荷重-変位曲線

#### 〈参考文献〉

- 1) 三池亮次：有限変形における増分形エネルギー基礎理論，工学会論文叢書集，309号，1981年5月
- 2) 吉田裕・増田勝紀・森本剛・広沢規行：立体骨組構造の増分連合方程式との解法，工学会論文叢書集，300号，1980年8月
- 3) 久田俊彦・清川馨一・仲威雄共訳：千モニエンコの塑屈理論，コロナ社