

日本道路公団 正会員 待田 淳一
 長岡技術科学大学工学部 正会員 笹戸 松二
 長岡技術科学大学工学部 正会員 林 正

1. まえがき

節点帯板法 (NSM) は、有限帯板法 (FSM) で用いられる帯板要素に節点変位を付加することにより、任意の境界条件を与えることができることも、長手方向にも要素分割のできる長大要素を用いた解析法として開発された¹⁾。本報告では、この NSM の自由度を検討して計算の効率化を図るために変位関数を改良し、種々の荷重をうける平板についての解析精度と収束性について調べた。

2. 節点帯板要素

(1) 一般化変位： 本解析法で用いる節点帯板要素は、4つの節点と2本の節線に自由度を有する (図-1)。節点 ia の一般化変位 dl_{ia} には各座標軸方向の並進変位 u, v, w とその微係数を用い、節線 i の一般化変位 dl_{im} には並進変位と w の微係数を節線上で級数展開したときの展開係数を用いる。

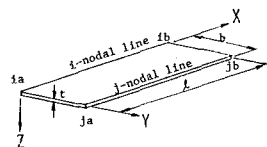


図-1 節点帯板要素

$$dl_{ia} = \{u, u_x, v, v_x, w, w_x, w_y\}^T_{ia}, \quad dl_{im} = \{u, v, w, w_y\}^T_{im} \quad (1)$$

ここに、添字 x, y はそれぞれ座標 x, y に関する微係数を表わす。したがって、一枚の節点帯板要素の節点に関する一般化変位 dl_o と節線に関する一般化変位の第 m 項 dl_m は、式 (1) を用いて次式のように表わせる。

$$dl_o = \{dl_{ia}^T, dl_{ja}^T, dl_{ib}^T, dl_{jb}^T\}^T, \quad dl_m = \{dl_{im}^T, dl_{jm}^T\}^T \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

(2) 変位関数： 要素中央面上の任意点の変位は、式 (2) の dl_o と dl_m を用いて次式のように表わせる。

$$u = f_{o1} dl_o + f_{11} \sum_m U_m dl_m, \quad v = f_{o2} dl_o + f_{12} \sum_m V_m dl_m, \quad w = f_{o3} dl_o + f_{13} \sum_m W_m dl_m \quad (3)$$

ここに、 f_{o1}, f_{o2} は x に関する3次、 y に関する1次多項式、 f_{o3} は x, y に関する3次多項式を要素とする変位関数ベクトルであり、 f_{11}, f_{12} は y に関する1次多項式、 f_{13} は y に関する3次多項式を要素とするベクトルで、これらは節点及び節線で変位と回転角が連続するように定めた。また、 U_m, V_m, W_m は両端固定の境界条件を満足する展開関数であるが、双曲線関数による桁落ちを防ぐために次式のように変形した式を用いた²⁾。

$$U_m = V_m = W_m = \frac{1}{(-1)^m + \cos \mu_m} \left\{ (-1)^m \sin \mu_m \xi - \sin \mu_m (1 - \xi) + \frac{\sin \mu_m}{1 - (-1)^m e^{-2\mu_m}} \left\{ e^{-\mu_m \xi} - (-1)^m e^{-\mu_m (1 - \xi)} \right\} \right\} \quad (4)$$

$$\cos \mu_m \cdot \cosh \mu_m = 1, \quad \xi = x/l \quad (5)$$

3. 数値計算例

(1) 長方形板の面外曲げ： 図-2に示す形状比 (a/b) が2の周辺単純支持板と周辺固定支持板に面外方向の荷重が作用する場合について計算した。板のポアソン比は0.3とし、対称変形を考慮して全体の1/4について解析した。計算は NSM と有限要素法 (FEM) で行い、FEM については日本電気の複合構造解析システム I SAP を用いて求めた。

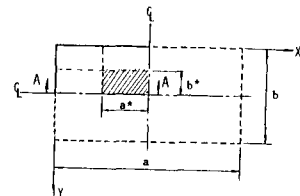


図-2 長方形板

表-1は、単純支持板及び固定支持板が全載等分布荷重をうけた場合の X 軸方向の対称軸 $A-A$ 上の変位 w を解析解³⁾との比で表わしたものである。また、表-2は固定支持板の中央点に集中荷重 P が作用した場合の $A-A$ 上の変位 w を解析解に対する比で示した。ここに、記号 M, N : X, Y 軸方向の分割数、 K : 採用した展開項数、 α^* : 要素の形状比 a^*/b^* 、 S, C : 単純支持、固定支持、 D : 板の曲げ剛

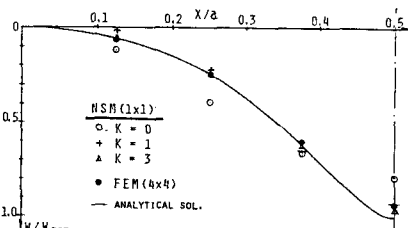


図-3 集中荷重による固定支持板の変位 w

性を表わす。また図-3は、表-2のNSMの1×1分割及びFEMの4×4分割の値を、解析解の最大値を1として示した。

(2) 片持板の面内曲げ:

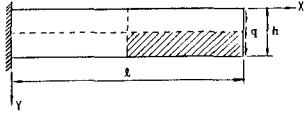


図-4に示す形状比(l/h)が5の長方形片持板にY方向の等分布線荷重 q が作用する場合、図-4 片持板について解析した。板のポアソン比は0.3とした。

表-3に板の上端におけるY軸方向の変位 v を、表-4にはFEMの出力の関係から板の中央線($Y = h/2$)に接する要素の中央点におけるせん断応力 τ_{xy} を、解析解 τ に対する比で示した。要素分割はFEMの20×8分割の他は等分割であり、20×8分割の場合は16×8分割において固定端側の要素をX方向に5等分した。

4. 考 察

表-1より、NSMでは展開項数 K を大きくすると単純支持板の境界付近での精度が固定支持板に較べて悪くなっている。これは、節線変位に両端固定の境界条件を持つ展開関数を用いているためと考えられる。面外曲げにおいてNSMとFEMを比較した場合、支持条件・荷重条件にかかわらずNSMで $K=3$ とすれば1×1分割でFEMの4×4分割と同程度の精度が得られている。面内曲げについて両解析法を比較すれば、NSMにおいて変位 v では1×2分割で、せん断応力 τ_{xy} の場合でも2×4分割して $K=3$ とすればFEMの16×8分割と同程度の精度が得られている。X軸方向応力 σ_x については、各解法・各分割において変位 v と同程度の精度が得られた。支持端において両解析法による τ_{xy} の値が解析解と大きく異なるのは、解析解と同じ力学的境界条件を与えることができないためである。

NSMにおいて要素の形状比 α^* に注目すれば、 α^* が大きいほど節線変位が有効に作用しているのがわかる。特に、形状比の大きい板では α^* を大きくすることができ、 α^* が大き過ぎると高精度の解を得るためには展開項数を多く用いなければならず、計算効率も逆に悪化する。一般的には、 $\alpha^* = 4 \sim 6$ として $K \leq 3$ で解が収束するのが最適と思われる。

今回の解析例では、NSMにおいてFEMと同精度の結果を得るのに必要な計算時間はFEMの1/4程度であった。したがって、NSMは境界・荷重条件にかかわらず長大要素を用いて高精度の結果が得られる効率のよい解析法といえる。

表-1 等分布荷重による長方形板の変位 w

Method	M	N	α^*	K	S/C	X/a			
						0.125	0.250	0.375	0.500
NSM	1	2.0	1	0	S	0.7823	0.8501	0.9142	0.9426
				0	C	0.4921	0.7470	1.0049	1.1307
				1	S	0.9246	0.9427	0.9641	0.9720
		3	C	0.8422	1.0077	1.0219	0.9713		
		3	S	0.9542	0.9688	0.9784	0.9831		
		3	C	1.0171	1.0048	1.0027	0.9987		
	2	4.0	2	0	S	0.5418	0.8953	0.8533	0.9157
				0	C	0.4910	0.7452	1.0026	1.1281
				1	S	0.8206	0.9050	0.9407	0.9434
		3	C	0.8327	0.9999	1.0195	0.9731		
		3	S	0.9519	0.9729	0.9815	0.9849		
		3	C	0.9978	0.9979	1.0010	0.9988		
2	2.0	2	0	S	0.9015	0.9342	0.9405	0.9434	
			0	C	0.8948	0.9998	0.9708	0.9723	
			1	S	0.9533	0.9576	0.9537	0.9567	
	1	C	1.0119	0.9953	0.9875	0.9902			
	3	S	0.9813	0.9833	0.9826	0.9834			
	3	C	1.0063	0.9978	0.9927	0.9937			
FEM	2	2.0	2	S	—	0.8601	—	0.9872	
				C	—	0.8992	—	0.9183	
	4	4.0	2	S	0.9448	0.9607	0.9693	0.9720	
				C	0.9171	0.9553	0.9762	0.9825	
	8	4.0	2	S	0.9757	0.9790	0.9804	0.9811	
				C	0.9728	0.9808	0.9828	0.9833	
Analytical Sol.					S	1.0	1.0	1.0	1.0
(xax*/OX10 ⁻⁴)					S	(2.8638)	(4.8772)	(5.9842)	(6.3304)
					C	(0.5683)	(1.1982)	(1.5029)	(1.5831)

表-2 集中荷重による固定支持板の変位 w

Method	M	N	α^*	K	X / a					
					0.125	0.250	0.375	0.500		
NSM	1	2.0	1	0	2.1969	1.6414	1.0895	0.7933		
				1	0.2877	0.9414	1.0670	0.9299		
				3	0.9553	1.0123	1.0122	0.9667		
		4.0	1	0	2.1973	1.6418	1.0897	0.7935		
				1	0.2418	0.9255	1.0677	0.9343		
				3	0.9411	1.0101	0.9999	0.9818		
	2	1.0	1	0	0.9072	0.9537	1.0554	0.9385		
				1	0.9919	1.0113	1.0116	0.9675		
				3	0.9902	1.0096	1.0139	0.9693		
		2.0	2	0	1.1186	0.9163	1.0094	0.9237		
				1	1.0685	1.0006	0.9818	0.9749		
				3	1.0415	0.9973	0.9926	0.9837		
FEM	2	1.0	1	0	1.3689	0.8804	0.7526	0.6995		
				1	1.1323	0.9885	0.9602	0.9684		
				3	1.0322	0.9963	0.9925	0.9917		
		2.0	2	0	0.6999	0.7972	0.8415	0.7908		
				1	0.9732	0.9529	0.9335	0.9059		
				4	1.0217	1.0184	0.9829	0.9411		
	8	2.0	5	0	1.0119	0.9324	0.9063	0.8891		
				1	0.9931	0.9900	0.9858	0.9711		
				4	1.0	1.0	1.0	1.0		
		Analytical Sol.					1.0	1.0	1.0	1.0
		$(\alpha P_0^2/D \times 10^{-3})$					(0.1019)	(0.4362)	(1.1090)	(1.8051)

表-3 片持板上縁における変位 v

Method	M	N	K	X/l			
				0.25	0.50	0.75	1.0
NSM	1	2	0	0.9086	0.9379	0.9459	0.9522
			3	0.9145	0.9468	0.9547	0.9589
		4	0	0.9285	0.9547	0.9625	0.9694
			3	0.9404	0.9678	0.9742	0.9781
	2	2	0	0.9137	0.9427	0.9526	0.9570
			3	0.9200	0.9491	0.9568	0.9606
		4	0	0.9379	0.9622	0.9713	0.9756
			3	0.9468	0.9706	0.9770	0.9806
FEM	8	4	0	0.7723	0.7935	0.7997	0.8029
			0	0.9018	0.9238	0.9301	0.9335
			20	0.9250	0.9399	0.9423	0.9460
	Analytical Sol.						1.0
							(0.0330)
							(0.1114)

表-4 片持板のせん断応力 τ_{xy}

Method	M	N	K	X/l			
				0.0	0.25	0.50	0.75
NSM	1	2	0	0.7662	0.9422	0.8889	0.8356
			3	0.8107	0.8640	0.9120	0.8711
		4	0	0.4325	1.0467	1.0197	0.8864
			3	0.1508	0.9827	1.0083	0.9358
	2	2	0	0.7733	0.8978	0.9280	0.8800
			3	0.8480	0.9013	0.8782	0.8871
		4	0	0.2944	1.0752	0.9131	0.9927
			3	-0.2190	0.9714	1.0211	0.9742
FEM	8	4	0	0.6740	0.9166	0.9298	0.9274
			16	0.3847	0.9766	0.9779	0.9779
			20	-0.2353	0.9770	0.9775	0.9774
	Analytical Sol.						1.0

*) 要素の中央の値について示しているため、各分割数による対応する解析解が異なる。

N=2: $\tau_{xy}=1.125$ ($V/h = 1/4$)
N=4: $\tau_{xy}=1.406$ ($V/h = 3/8$)
N=8: $\tau_{xy}=1.477$ ($V/h = 7/16$) ($\tau_y = \frac{1}{2} \tau_x$)

1) 菅野・林・中野: ハイブリッド要素法による薄肉構造解析, 第37回土木学会年次学術講演会 講演概要集, I-164, 1982.

2) 菅野・林・持田: 薄肉構造解析のための節点要素法, マトリックス解析法研究発表論文集, JSSC第17回大会, 1983.

3) Timoshenko, S.P. & S.Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., 1959.

4) Timoshenko, S.P. & J.N.Goodier: Theory of Elasticity, 3rd ed., 1982.