

電力中央研究所 正会員 中村 秀治
電力中央研究所 松井 正一

1. まえがき

特殊な使用目的の有限要素を除いて、応力解析、振動解析などに通常用いられる要素剛性マトリックスは、殆んど検討しつくされている。その大部分はマトリックスの積を被積分関数とした積分形で与えられており、実際の解析に当っては数値積分で要素剛性マトリックスを求めている。この解析手順に何ら問題は無いのであるが、数式処理システムの一つである REDUCE を用いて、プログラミングの効率化、要素剛性マトリックスの精度向上、計算時間の短縮を目的として一検討を行った。具体的には、変厚の三角形板/シェル要素の剛性マトリックス成分をすべて数式で求め、まず、REDUCE によるプログラミングの効率化を検討する。さらに、数値積分と精度、計算時間を比較検討し、REDUCE により機械的に作成される要素マトリックスの数値的安定性についても考察する。

2. 変厚三角形板/シェル要素の剛性マトリックスの積分表示

座標系などに関する規約を図-1~4 の様に定め、面積座標を (ξ_1, ξ_2, ξ_3) とする。

面内

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{Bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial U_x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial U_y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial U_y}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{Bmatrix}$$

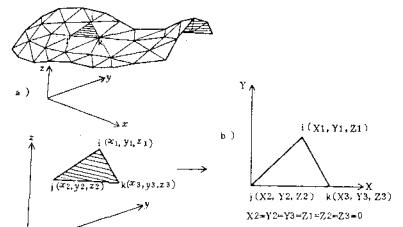


図-1 a) シェルの三角形要素による分割
b) 局所座標と全体座標

Jacobian を J とすれば、 $J = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}$, $J^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{31} \\ x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$ (但し、 A は三角形の面積
 $y_{23} = y_2 - y_3$, $x_{31} = x_3 - x_1$
 $x_{12} = x_1 - x_2$, $x_{13} = x_1 - x_3$)

$$\text{であり、} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial U_x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial U_y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial U_y}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial U_x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial U_y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial U_y}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} P \delta$$

ここで、 $D = (t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3) \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$ (ただし、 t_1, t_2, t_3 は
点 i, j, k に
あける板厚) とし、 $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = D \epsilon$ とすれば

剛性マトリックス K_p は

$$K_p = \int_A P^T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix}^T T^T D T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} P dA$$

面内回転

面内回転 $\begin{Bmatrix} \psi_{\xi_1} \\ \psi_{\xi_2} \\ \psi_{\xi_3} \end{Bmatrix}$ に関する剛性マトリックス K_θ は、

$$K_\theta = \frac{0.03(E_x + E_y)(t_1 + t_2 + t_3)}{2 \cdot 3} A \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

面外曲げ

$W = -U_z$ とし、 $W = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$ (但し、 ξ は一般化された変位)

$$\text{とすれば、} \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2\xi_2 & 2\xi_3 & -6(\xi_1 - \xi_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2\xi_1 & 6(\xi_2 - \xi_3) & -2\xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2(\xi_1 - \xi_2) & 2(2\xi_2 - \xi_3) & -2(2\xi_1 - \xi_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad \text{であり、}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} y_{23}^2 & y_{31}^2 & 2y_{12}y_{23} \\ x_{23}^2 & x_{31}^2 & 2x_{12}x_{23} \\ 2x_{12}y_{23} & 2x_{13}y_{31} & 2(x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \end{Bmatrix}$$

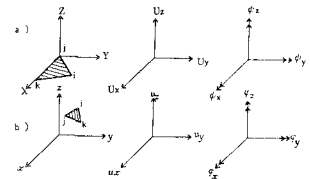


図-2 a) 局所座標, b) 全体座標系での変位の規約

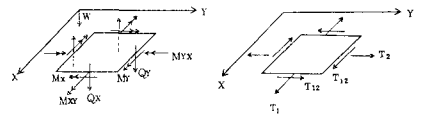


図-3 力とモーメント

図-4 面内力の規約

であるから、 $D = \frac{(t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3)}{12} \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$ (ただし、 $E_{xx} = \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y}$, $E_{yy} = \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y}$, $E_{xy} = E_{yx} = \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x \nu_y}$; ν_x, ν_y はポアソン比)

剛性マトリクス K_B は

$$K_B = \int_{\Delta} P^T T^T D T P dA$$

と表わされる。さらに q を変位ベクトル $\delta = [w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial y}, w_3, \frac{\partial w_3}{\partial x}, \frac{\partial w_3}{\partial y}]^T$ で置き直せば $q = G^{-1} [1, J, 1, J, 1, J]^T \delta = B \delta$ となる

$$K_B = \int_{\Delta} B^T P^T T^T D T P B dA$$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ -1 & 0.5 & -0.5 & 1 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

3. 変厚三角形板/シェル要素剛性マトリックス成分の数式表示

行数が多くなるため、REDUCE による計算手順と合わせて、当日 OHP で発表する予定である。

4. 数式処理と数値積分の比較

数式処理と数値積分のいずれにも、最も条件の悪い面外曲げについて比較を行なう。 $K_B = \int_{\Delta} B^T P^T T^T D T P B dA$

は、 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に関して 5 次式である。従って、数値積分するとすれば 5 次 (7点) を用いなければ精度が悪いはずである。81 個のマトリックス成分について誤差と計算時間を比較した結果は、表-1 の通りである。ここで、誤差は

		誤差	時間 (msec.)
	REDUCE	4.95×10^{-6}	2.94
数	次数 1	9.75	2.71
値	2	8.03	3.08
積	3	4.00	3.26
分	5	5.02×10^{-6}	3.79

表-1 誤差と計算時間に関する比較

(但し、M=200, FORTRAN OPT=3)

$$\text{誤差} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (A_{ij} - B_{ij})^2}{\sum_{i,j} A_{ij}^2}} \quad \left(\begin{array}{l} A_{ij}: \text{REDUCE, 倍精度} \\ B_{ij}: \text{数値積分, 倍精度} \end{array} \right) * \text{マトリックス成分の値が全く異なっている。}$$

で求めるものとし、三点の座標と板厚は $(1., 1., 0.), (10., 15., 0.), (5., 30., 0.)$, および、 $t_1 = 0.1, t_2 = 0.1 \times n, t_3 = 0.1 \times m$ ($n, m = 1, 10$) とした。この結果から同精度のマトリックスを得るのに数式処理の方が数値積分より高速であることがわかる。

5. REDUCE で機械的に作られたマトリックスの数値的安定性

機械的に生成したプログラムでは、丸め誤差等への考慮が十分払われていない可能性がある。そこで、この点について次の手順で検討した。

- ① 数式処理で作成したプログラムを用い、倍精度計算したマトリックス成分を A_{ij} とする。
- ② 同じプログラムで、下位 k ビットを 0 にして単精度計算したマトリックスを B_{ij}^k とする。
- ③ 誤差を次式で計算する。

$$\text{誤差} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (A_{ij} - B_{ij}^k)^2}{\sum_{i,j} A_{ij}^2}}$$

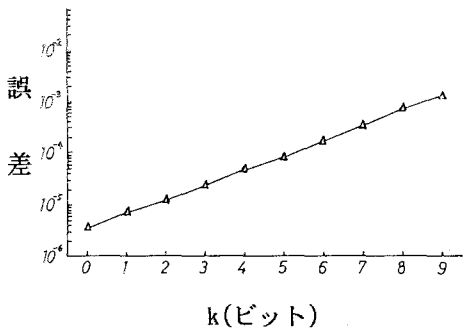


図-5 ビット欠落と精度の関係

この結果は図-5 の通りである。図より、 $\log_2 10 = 3.32$ ビット毎に 1 桁精度が悪くなることがわかる。これは数式処理で作成されるプログラムが数値的に安定であることを示している。

6. 結 び

以上、REDUCE による変厚三角形板/シェル要素剛性マトリックスの計算が容易で、人為的ミスの入る可能性の少いことを示し(当日 OHP で示す)、精度、計算時間、数値的安定性の点からも数値積分に優る事を指摘した。数式処理システムには、それ特有の問題点も有り万能ではないが、一つの適用分野として有限要素マトリックスの計算があるということであろう。

参考文献 1) Holand, I. and Bell, K. ed.: Finite Element Methods in Stress Analysis, TAPIR, 1969
 2) 塩尻弘雄: 自然通風冷却塔の不等沈下が塔体の変形、応力に及ぼす影響、電中研報告 74538, 1975
 3) Hearn, A.C.: REDUCE USER'S MANUAL (Version 3), The Rand Corporation, April, 1983