

信州大学工学部 正員 大上俊之
名古屋大学大学院 桑田尚史
信州大学工学部 正員 三井康司

1. まえがき

境界要素法 (BEM) は境界上のみを離散化で解析可能であるため、有限要素法 (FEM) 等の領域型の解析法とは異なり、対象とすべき問題の次元を1次元下げて解析することが可能である。しかしながら、境界要素法を使用する場合にも、工学上しばしば重要となる自重、定常熱応力などの物体力を考慮して解析するためには、FEMと同様の手順で対象領域内を任意のCellに分割し、このCell内の領域積分を数値的に評価せねばならず、計算機効率の面から考えるとBEM本来の利点が減少することになる。これに対処するために Galerkin テンソルを用いて、領域積分を境界積分に変換して物体力を評価する工夫が Danson らによってなされている [1]。

本研究はこれら物体力に関して、地盤一構造工学の中でも特に重要と考えられる自重に注目し、境界要素法の適用に際しての計算効率、精度等を計算例を用いて数値的に考察したものである。

2. 計算手順の概略

2次元弾性問題における境界要素法の基礎方程式は式(1)で与えられる。ここで、右辺第2項が物体力 b_i に関する領域積分項であり、通常は領域内をいくつかのCellに分割して数値積分を行なって物体力を評価している。すなわち、いま式(1)の物体力項を B_k とおき、領域を M 個のCellに離散化すると B_k は式(2)となる。式(2)によって領域積分を行うことにより物体力を評価することができるが、ここで、BEM本来の利点を失わないように領域積分を等価な境界積分に変換することを考える。そのために、 B_k に対して Gauss の発散定理を適用できるように、Galerkin テンソル G_{ki} を用いて基本解 U_{ki} を式(3)のように定義する。ここで、 ν はポアソン比、 $(,)$ は微分を表わす。基本解に Kelvin 解を用いると G_{ki} は2次元問題に対して式(4)となる。ここに E はヤング率、 δ_{ki} はクロネッカーのデルタ、 r は距離である。

物体力として均一な自重を考える場合には b_i は一定となるので積分の外に出すことができ、Gauss の定理を適用して式(5)を得る。したがって式(5)を式(1)に用いることにより、すべての項が境界積分で表わされることになる。式(4)の Galerkin テンソルを微分して式(3)に代入すれば、一定の物体力が作用する場合の B_k が式(6)の形で得られるので、以下BEMの通常の計算手順によって境界上の変位、表面力を求めることができる。

3. 数値計算例と考察

図-1に示すような地盤上に、等分布荷重が載荷された場合の平面ひずみ状態としての数値解析を行う。FE、BE (線形要素) 解析における分割図をそれぞれ図-1、図-2に示す。BEMの計算では、境界積

$$C_{ki}(x)u_i(x) + \int_S T_{ki}(x, y)u_i(y) dS_y \\ = \int_S U_{ki}(x, y)t_i[u] dS_y + \int_V U_{ki}(x, y)b_i(y) dV_y \quad (1)$$

$$B_k(x) = \sum_{m=1}^M \int_V U_{ki}(x, y)b_i(y) dV_y \quad (2)$$

$$U_{ki}(x, y) = G_{ki,jj}(x, y) - \frac{G_{kjj,i}(x, y)}{2(1-\nu)} \quad (3)$$

$$G_{ki}(x, y) = \frac{1+\nu}{4\pi E} \delta_{ki} r^2 \ln \frac{1}{r} \quad (4)$$

$$B_k(x) = b_i \int_S \left\{ G_{ki,jj}(x, y) - \frac{G_{kjj,i}(x, y)}{2(1-\nu)} \right\} n_j dS_y \quad (5)$$

$$B_k(x) = \frac{1+\nu}{4\pi E} \int_S r \left(2 \ln \frac{1}{r} - 1 \right) \left(b_k n_m r_m - \frac{n_k b_m r_m}{2(1-\nu)} \right) dS \quad (6)$$

分はGauss の4点積分, 領域積分はHammerの4点積分を用いた。図-3に地盤上の鉛直方向, 水平方向の変位を, 図-4に表面下1mの点の主応力 σ_2 の分布を示す。領域内部をCellに分割する方法, Galerkinテンソルを用いる方法ともFEMによる解とよく一致していることがわかる。また, 表-1に各手法の計算ディテールを示すが, これよりGalerkinテンソルを用いる方法が最も計算効率の良いことがわかる。次に, 領域内部をCellに分割する方法について, 分割の粗さと数値積分点数が精度にどれほど影響を与えるかを考察するために, 図-5に示すように領域内を8, 16, 32, 64, 128個のCellに分割した場合について考え, それぞれ数値積分として, Hammerの1, 4, 7点の3通りの計算をして, FEMによる解との比較検討を行った。表-2に表面下1mの点(1.0, 1.0)の水平方向変位について, FEMによる解との差およびC.P.U. timeを示す。これより本計算例では, 有限要素における分割と比較して, 内部Cellをかなり粗くしても積分点数のとり方によってはかなり精度よく自重の評価が可能であることがわかる。また, 境界要素解析においてGalerkinテンソルを用いることにより, 効果的に自重を評価し得ることがわかった。

4. あとがき

物体力として自重が作用した場合のBEMの適用に際しての精度, 計算効率を簡単な計算例を用いて考察した。領域毎に自重が異なる場合およびFEとの結合手法等に関しては今後の課題としたい。

表-1 計算ディテール

		ELM.		Cell		CPU(s)
		NODE	ELM.	NODE	ELM.	
FEM		153	256	-	-	24.8
BE (Const.)	Bound.	42	42	-	-	12.0
	Region	-	-	27	32	15.5
BE (Linear)	Bound.	42	42	-	-	13.4
	Region	-	-	27	32	15.9

(HITAC M-240H)

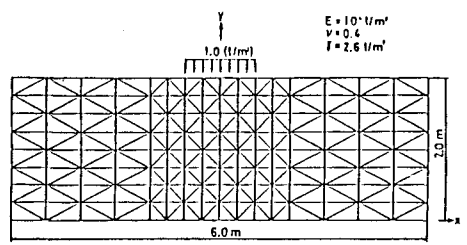


図-1 FE分割図

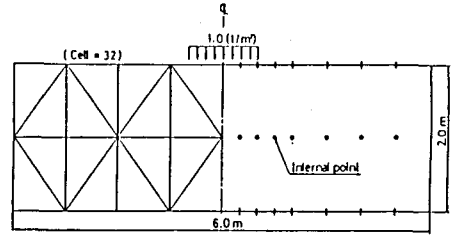


図-2 BE分割図

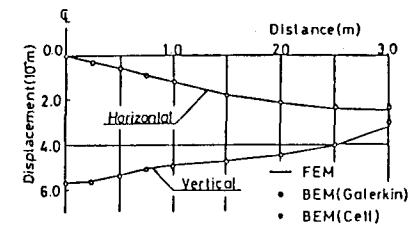


図-3 地盤上の変位図

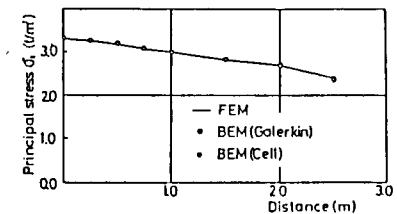


図-4 表面下1mの主応力図

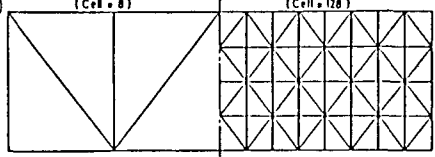


図-5 Cell分割図

表-2 (a) 水平変位の比較 (Const. E.) (b) 水平変位の比較 (Linear E.)

Cell		128	64	32	16	8	Galerkin	128	64	32	16	8	Galerkin
Int.P.													
Diff. (%)	7	0.8	0.9	0.8	1.1	0.6	0.8	0.8	0.8	0.7	1.3	0.3	0.8
	4	0.9	0.5	0.5	0.3	19.9		0.8	0.5	0.7	0.2	19.8	
	1	0.9	1.5	1.5	4.7	19.7		1.0	1.5	1.4	4.6	20.0	
CPU(s)	7	20.2	16.9	16.0	14.7	14.9	12.0	21.5	18.1	16.7	15.8	15.3	14.0
	4	17.8	15.7	15.5	14.4	14.7		19.1	17.0	16.0	15.5	15.2	
	1	15.4	15.6	14.8	14.1	13.9		16.6	15.8	15.3	15.2	15.0	

参考文献: (1)Danson,D.J.: A boundary Element Formulation of Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces, Boundary Methods, Ed.Brebbia.C.A, Springer-Verlag, Berlin, 1981.