I-71　　境界要素法による変断面はりの解析について

岩手大学工学部　正員　○出戸　秀明
同上　正員　宮本　裕
同上　正員　岩崎　正二

1．はじめに

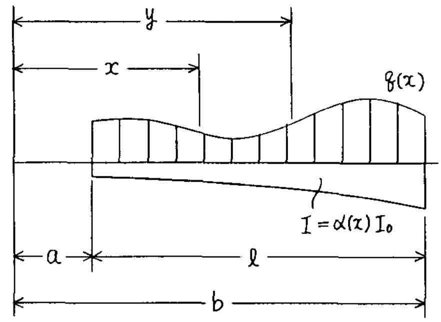
変断面のはりの解法として、無限長の変断面はりの静的曲げ問題の基本解を用いた境界積分方程式による手法を示し、さらに基本解の得られていない変断面はりの解法として、等断面はりの基本解を用い、モデルの離散化により、はりの途中の分割点におけるたわみを未知数に加えた数値解法を示し、結果が従来の方法によるものと一致することを確めている。

2．基本解が既知の場合

図－1のような変断面はりが分布荷重を受ける場合の微分方程式は式(1)で与えられる。

$$EI_0\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right]=q(x) \quad \text{——— (1)}$$

ただし、EI_0はある基準点での曲げ剛性、$\alpha(x)$は断面２次モーメントの変化を表わす関数。



図－1.

いま、無限長変断面はりの基本解を式(2)のように定義し、式(1)の両辺に基本解 $w^*(x,y)$ をかけ、はりのスパンℓにわたって積分し（$w(x)$の微係数がなくなるまで部分積分を繰り返す）、式(3)を得る。

$$EI_0\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2w^*(x,y)}{dx^2}\right]=\delta(x-y) \qquad \delta：デルタ関数 \quad \text{——— (2)}$$

$$\Big[-Q(x)w^*(x,y)+M(x)\theta^*(x,y)-\theta(x)M^*(x,y)+w(x)Q^*(x,y)\Big]_{x=a}^{x=b}$$
$$+\int_a^b w(x)\cdot EI_0\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2w^*(x,y)}{dx^2}\right]dx=\int_a^b q(x)w^*(x,y)\,dx \quad \text{——— (3)}$$

ここで、式(2)を式(3)に代入してデルタ関数の性質を考慮すれば、式(4)より点yでのたわみが求められる。

$$w(y)=\Big[Q(x)w^*(x,y)-M(x)\theta^*(x,y)+\theta(x)M^*(x,y)-w(x)Q^*(x,y)\Big]_{x=a}^{x=b}+\int_a^b q(x)w^*(x,y)\,dx \quad \text{——— (4)}$$

ただし、$\theta(x)=dw(x)/dx$，$M(x)=-EI_0\alpha(x)d\theta(x)/dx$，$Q(x)=-EI_0\,dM(x)/dx$

さらに、式(4)をyについて微分して

$$\theta(y)=\Big[Q(x)\widehat{w^*}(x,y)-M(x)\widehat{\theta^*}(x,y)+\theta(x)\widehat{M^*}(x,y)-w(x)\widehat{Q^*}(x,y)\Big]_{x=a}^{x=b}+\int_a^b q(x)\widehat{w^*}(x,y)\,dx \quad \text{——— (5)}$$

ただし、$\widehat{w^*}(x,y)=\partial w^*(x,y)/\partial y$，$\widehat{\theta^*}(x,y)$，$\widehat{M^*}(x,y)$，$\widehat{Q^*}(x,y)$についても同様。

式(4)，(5)において、$y\to a+\varepsilon$，$y\to b+\varepsilon$としたときのε（微小な正定数）→０の極限を考えることにより、境界における４本の方程式が得られ、境界条件により定まる４個の境界量を考慮すると、基本解が既知の変断面はりの問題が解けることになる。

3．基本解が未知の場合

次に基本解が得られていない変断面のはりについて、等断面のはりの基本解を用いて、前述の手法を試みる。

いま、等断面はりの静的曲げ問題の基本解は式(6)で定義される。 このとき式(6)を式(3)に代入してデルタ関数

$$EI_0 \frac{d^4 w^*(x,y)}{dx^4} = \delta(x-y) \qquad \delta：デルタ関数 \qquad ――― (6)$$

の性質を考慮すれば式(7)が得られる。 等断面はりの基本解を用いたために式(7)右辺最後の積分項が現れ、前述

$$\alpha(y)w(y) = \left[Q(x)w^*(x,y) - M(x)\theta^*(x,y) + \theta(x)\alpha(x)M^*(x,y) - w(x)\left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M^*(x,y) + \alpha(x)Q^*(x,y) \right\} \right]_{x=a}^{x=b}$$

$$+ \int_a^b g(x)w^*(x,y)\,dx + \int_a^b w(x)\left[\frac{d}{dx}\left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M^*(x,y) \right\} + \frac{d\alpha(x)}{dx} Q^*(x,y) \right] dx \qquad ――― (7)$$

の手法のように境界量を用いただけでは解けないということになる。 以下に式(7)を、領域$a \leqq x \leqq b$にいくつかの代表点のたわみを未知数に加えた離散化による数値計算の手法を示す。

いま、領域 $a \leqq x \leqq b$ をn分割したときの式(7)右辺最後の項を、領域Γ_j（$j=1 \sim n$）について、Gaussの4点積分公式により近似すると、

$$G(y) = \int_a^b w(x)F(x,y)\,dx \qquad \left(ただし、F(x,y) = \frac{d}{dx}\left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M^*(x,y) \right\} + \frac{d\alpha(x)}{dx} Q^*(x,y) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} w(x)F(x,y)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{4} M_1 F_j(\xi_k, y) f_k J \;,\; \sum_{k=1}^{n} M_2 F_j(\xi_k, y) f_k J \right] \begin{Bmatrix} w_{\Gamma_j 1} \\ w_{\Gamma_j 2} \end{Bmatrix} \qquad ――― (8)$$

ただし、ξは無次元座標 $\xi = 2nx/\ell$，$M_1 = -(\xi-1)/2$，$M_2 = (\xi+1)/2$，$J = \ell/2n$，f_kは重み関数。

これを式(7)に戻して、

$$\alpha_{i+1} w_{i+1} = a_{i+1 \cdot 1} Q_b + a_{i+1 \cdot 2} M_b + a_{i+1 \cdot 3} \theta_b + a_{i+1 \cdot 4} w_b + b_{i+1 \cdot 1} Q_a + b_{i+1 \cdot 2} M_a + b_{i+1 \cdot 3} \theta_a + b_{i+1 \cdot 4} w_a$$

$$+ g_{i+1} + c_{i+1 \cdot 1} w_1 + c_{i+1 \cdot 2} w_2 + c_{i+1 \cdot 3} w_3 + \cdots\cdots + c_{i+1 \cdot i+1} w_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad ――― (9)$$

ここで、a_{ij}，b_{ij}はそれぞれの分割点での基本解の値、g_iは荷重に関する項、C_{ij}は式(8)より導かれる係数。また、$w_1 = w_a$，$w_{n+1} = w_b$，Q, M, θ に関しても同様である。

さらに式(7)をyについて微分し、$y \to a$，$y \to b$としたときに得られる2本の式と式(9)を合わせて、$n+3$本の式を得る。 境界における8個の量と分割点のたわみ$n-1$個のうち、境界条件より定まる4個の境界量を除く$n+3$個の未知量は、これらの式より求められることになる。 また、これらの式により得られた未知量を式(7)に戻して任意の点のたわみが得られ、式(7)をyについて微分した式からたわみ角が、2回微分した式からモーメントが、3回微分した式からせん断力が次々に求められる。

4．数値計算例

数値計算は、等分布荷重を受ける単純支持の変断面はりで、$\alpha(x) = 1+m(x/\ell)$，$1+m(x/\ell)^2$，$1+m(x/\ell)^3$ として行ない、分割数$n=6$の場合の計算結果を表－1.に示す。 ここで$w_2 \sim w_6$ は分割点のたわみ、θ_1，θ_7，Q_1，Q_7 は両端のたわみ角とせん断力を表わす。（ ）内の値は、Newmark's methodによるもので、いずれも1％程度の誤差で一致している。 なお諸元は、$m=1.0$，$\ell=2.0$m，$EI_0 = 1.0$tm²，$g(x) = 3.0$t/mとした。

	$1+m(x/l)$	$1+m(x/l)^2$	$1+m(x/l)^3$
w_2	0.228168 (0.227201)	0.267289 (0.266419)	0.287109 (0.286307)
w_3	0.379555 (0.379006)	0.447510 (0.446653)	0.485046 (0.483904)
w_4	0.422227 (0.422344)	0.497421 (0.497156)	0.542236 (0.542428)
w_5	0.355773 (0.356424)	0.416018 (0.416890)	0.455667 (0.456067)
w_6	0.202258 (0.202961)	0.234560 (0.235489)	0.256212 (0.257235)
θ_1	0.735325 (0.727239)	0.852770 (0.850159)	0.912303 (0.910188)
θ_7	-0.632331 (-0.635643)	-0.728865 (-0.734622)	-0.793898 (-0.801399)
Q_1	3.000004 (3.0)	3.000055 (3.0)	2.999560 (3.0)
Q_7	-3.000004 (-3.0)	-3.000027 (-3.0)	-2.999580 (-3.0)

表－1.

参 考 文 献

1)C.A.Brebbia：The Boundary Element Method for engineers (1978)　2)田中正隆・田中喜久昭：境界要素法―基礎と応用，丸善，(1982)　3)成岡昌夫：ニューマークの数値計算法，技報堂 (1978)