

琉球大学 正会員 伊良波 繁雄

1. はじめに ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理にモールクーロンの式をラランジェの未定乗数法を用いて導入することによって、地盤の支持力の問題が解析¹⁾できることを示した。しかし、要素境界面に引張破壊が生じる時は新しい節点が必要となり、数値計算の上で困難な問題となる。本研究では新しく生じた節点変位を要素単位で消去する方法ですべり破壊、引張破壊、圧縮破壊を考慮した解析方法を示した。なお、数値計算例としてはコンクリートブロックの圧縮強度の問題を解いた。

2. 理論 ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理と要素境界積分を
図-1に示す局所座標系 n - s で変換すると次式のようになる。

$$\pi_{CH} = \sum_n \left(\iint_{\Omega_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{S_n} (U \bar{v}_n + V \bar{t}_{ns}) ds + \int_{S_s} (U \bar{v}_n + V \bar{t}_{ns}) ds \right) \quad (1)$$

付帯条件は $\sigma_{ij,j} = 0$: V_n 内, $U = \bar{U}$, $V = \bar{V}$: S_u 上

である。ここで、 $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー、 U, V はそれぞれ n 方向、 S 方向の変位、 $\bar{t}$: 既知量、 ℓ と m を方向余弦とすると $\bar{t}_n$ と $\bar{t}_{ns}$ は

$$\bar{t}_n = \ell^2 + 2\ell m + m^2, \quad \bar{t}_{ns} = -(\ell^2 - m^2) \quad (2)$$

である。要素境界にすべりが生じ、すべっている間、 $\bar{t}_{ns}$ と $\bar{t}_n$ の関係は図-3に示すモールクーロンの式が成立しているとするれば、すべり面において次式を満たさねばならない。

$$\Delta \bar{t}_{ns} \pm C_1 \Delta \bar{t}_n = 0 \quad (3)$$

ここで、 Δ は増分記号である。すべり面において、式(3)を満足させるために、ラランジェの未定乗数 γ を用いて、式(1)に導入すれば

$$\pi_{CH}^* = \pi_{CH} - \int_{S_s} \gamma (\bar{t}_{ns} \pm C_1 \bar{t}_n) ds \quad (4)$$

となる。ここでは、簡単のために増分記号を省略して示している。なお、式(3)で S_s 上の V は零とする。つぎに、荷重が増加するにつれて、破壊が進行する場合を考える。本研究で仮定している破壊条件は図-3に示すように、すべりに対してはモ

ールクーロンの式を仮定し、圧縮側と引張側に対しては、それぞれ圧縮強度(F_c)と引張強度(F_t)の限界値を設定した。要素境界の垂直応力度($\bar{t}_n$)が F_c に達すると、応力解放を伴って要素境界から分離される。したがって、数値計算の上では新しい節点が必要となる。また、 $\bar{t}_n$ が F_c に達すれば、それ以後の応力増分は零となる。このために、応力の伝達が零になるように、降伏後の節点を切り離す方法をとっている。したがって、いずれの破壊が起っても、変位の自由度が増加し計算上の困難を伴う。ここでは破壊の進行によって増加する変位を要素単位で消去する方法で計算を行った。図-2に示すように、すべり破壊と引張破壊が生じている場合を考える。式(4)で変位の増加に関連する項を A とすれば

$$A = - \int_{S_c} (U \bar{v}_n + V \bar{t}_{ns}) ds + \int_{S_c} (U \bar{v}_n^L + V \bar{t}_{ns}^L) ds - \int_{S_s} \gamma (\bar{t}_{ns} \pm C_1 \bar{t}_n) ds \quad (5)$$

となる。ここで S_c : 引張破壊面、 $\bar{v}_n^L$ と $\bar{t}_{ns}^L$: 解放応力である。 π_{CH} の一周積分はひびわれ領域 S_c については式(5)で計算し、それ以外は式(1)で計算を行う。しかし、数値計算の上では、ひびわれがあるなしにかかわらず一周積分し、連立方程式を解く時に π_{CH} のひびわれ面の U, V が零になるように計算する。したがって変分原理を整理すれば、

$$\pi_{CH}^* = \pi_{CH} + A \quad (6)$$

となり、付帯条件は π_{CH} 内の U, V は $U = 0$, $V = 0$: S_c 上

$$V = 0$$
 : S_s 上, $\sigma_{ij,j} = 0$: V_n 内, $U = \bar{U}$, $V = \bar{V}$: S_u 上

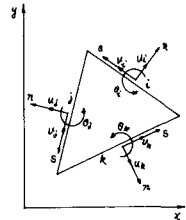


図-1 2次元ハイブリッドストレスモデル

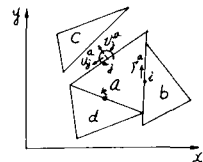


図-2 要素aの破壊状況

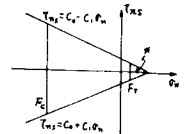


図-3 モール・クーロンの式

である。なお、圧縮破壊に対しては $\bar{\sigma}_n^L = \bar{\tau}_{ns} = 0$ となる。剛性マトリックスを導くために、応力、変位をそれぞれ次のように仮定する。

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y, \quad \sigma_y = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y, \quad \tau_{xy} = -\beta_2 y - \beta_3 x + \beta_7 \quad (7)$$

$$U = u_1 - \theta_1 x, \quad V = v_1 \quad (8)$$

式(8)で u_1, v_1, θ_1 は図-1に示すように、辺中央の変位である。式(7)を式(9)のように表わし、ひずみと応力の関係式を式(10)のように表わす。

$$\{\sigma\} = [B]\{\beta\} \quad (9) \quad \{E\} = [C]\{\theta\} \quad (10)$$

式(9), (10)を用いれば式(1)の右辺第1項は次のようになる。

$$\iint_{\Omega} B(\theta_{ij}) dx dy = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} \quad (11)$$

ここで、 $[H] = \iint_{\Omega} [B]^T [C] [B] dx dy$ である。式(1)の右辺第2項は式(2), (7), (8)より

$$\int_{\partial\Omega} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (12)$$

となる。ここで、 $\{u\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}$ である。つぎに、外力ベクトルを $\{\bar{F}\}$ とすれば、式(1)の右辺第3項は

$$\int_{\Omega} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{\bar{F}\} \quad (13)$$

となる。式(5)の右辺第1項と第3項を一つにまとめて計算する。図-3の場合は

$$-\int_{\Omega} T(\tau_{ns} \pm C \theta_n) ds - \int_{\Omega} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G^*] \{\Delta\} \quad (14)$$

となる。ここで、 $\{\Delta\}^T = \{T, u_1, v_1, \theta_1\}$ であり、破壊によって増加した変位である。一般的には $[G^*], \{\Delta\}$ は要素境界の破壊状況を考慮して作成する。つぎに、解放応力による節点力を $\{\bar{F}\}$ とすると、式(5)の第2項は

$$\int_{\Omega} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{\Delta\}^T \{\bar{F}\} \quad (15)$$

となる。式(11), (12), (13), (14), (15)を式(6)に代入すれば

$$\pi_{CH}^{**} = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} - \{\beta\}^T [G^*] \{\Delta\} + \{\Delta\}^T \{\bar{F}\} \quad (16)$$

となる。式(16)で $\{\beta\}$ について停留条件を求め、これを式(16)

に代入し、 π_{CH}^{**} を $\{u\}, \{\Delta\}$ だけで表わす。つぎに、 $\{u\}, \{\Delta\}$ について停留条件を求め $\{\Delta\}$ を消去すると、

$$([K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{u\} = \{\bar{F}\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1}\{\bar{F}\} \quad (17)$$

となる。ここで、 $[K_{11}] = [G]^T [H] [G]$, $[K_{12}] = [G]^T [H] [G^*]$

$[K_{21}] = [G^*]^T [H] [G]$, $[K_{22}] = [G^*]^T [H] [G^*]$ である。

3 数値計算例 図-4に示すように、剛板上に置かれたコンクリートブロックの支圧強度の解析を行った。解析結果は図-5に示すように S. K. Ni-Yagi の実験値²⁾ (コンクリートの立方体から円柱強度の換算係数を 0.7~0.9) と比較したところ、応力解放なしの曲線に近い結果となった。つぎに、図-7はコンクリートブロックの圧縮強度の問題である。小阪による理論解³⁾と比較したところ、図-9に示すように、良好な値を得ることができた。最後に、このモデルのように要素境界ですべりを表現する場合、材料定数の選定、餘荷の判定の問題があるが、今後の研究課題としたい。

謝辞 本研究にあたり貴重な御助言をいただいた、東大、川井忠彦教授に心から感謝いたします。

参考文献 (1)伊良波、川井 "2次元ハイブリッドストレスモデルによる極限解析" 33回応力連続講演 (2) S. K. Ni-Yagi "Bearing Strength of Concrete Geometric Variations" ASCE, STP, 1973. (3)小阪 "荷重と中の比が異なる供試体の圧縮強度変化に関する研究" 建築論集 62号 1959年6月

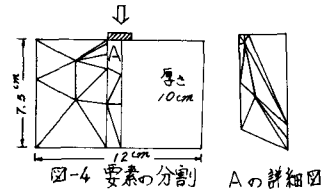


図-4 要素の分割 Aの詳細図

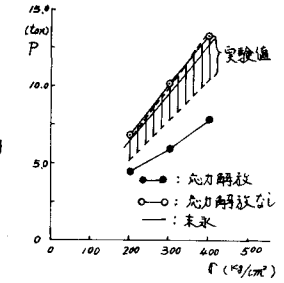


図-5 平均圧強度

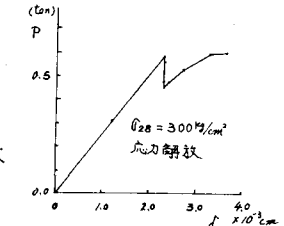


図-6 荷重変位曲線

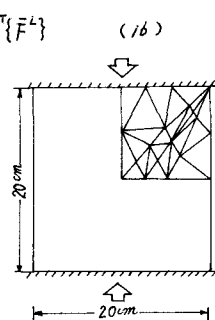


図-8 要素の分割

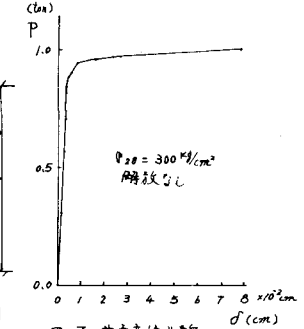


図-7 荷重変位曲線

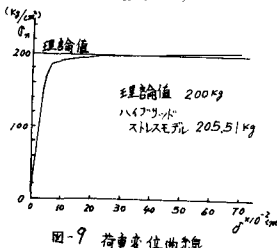


図-9 荷重変位曲線

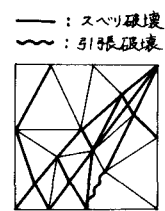


図-10 スベリ破壊