

東京大学 学生員 池田 豊人 東京大学 正員 長谷川 彰夫
 東京大学 正員 西野 文雄 東京大学 K. K. Liyanage

1. まえがき 現在、はり-柱の面内座屈問題、および非線形問題については、その有限要素解析の基本となる剛性方程式がよく知られている。¹⁾ところが、横座屈現象など、ねじれを含む面外座屈問題では、支配方程式はよく知られているものの、剛性方程式が、簡潔な陽な表現で示されていない。そこで、仮想仕事の定理を利用して、その剛性方程式を誘導することを試みた。その際、議論の展開を簡単にするため、ねじれを考慮した座屈現象の本質的な部分を含む、1軸対称断面を有するはり-柱の横座屈現象について考える。

2. 剛性方程式の誘導 座標系と荷重条件を Fig. 1 に示す。

線形化有限変位理論に対する仮想仕事の定理は一般的に

$$\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij}^L dv + \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij}^{NL} dv - \int_V P_i \delta u_i dv - \int_S T_i \delta \bar{u}_i dS = 0 \quad (1)$$

と与えられる。1軸対称断面のはり-柱の横座屈を対称としているため、変位成分の内、ここでは、 v と ϕ が関与するひずみの2次項までを考え、せん断中心 $S(y_s, z_s)$ の $y_s = 0$ とすると、ひずみの線形項 e^L 、非線形項 e^{NL} として、

$$e_{xx} = e_{xx}^L + e_{xx}^{NL} = -y v'' - \omega \phi'' + \frac{1}{2} v'^2 + Z_s v' \phi' + Z_s \phi' v' + \frac{1}{2} \{y^2 + (z - z_s)^2\} \phi'^2 \quad (2)$$

となる。²⁾応力とひずみの関係はひずみの線形項のみを考えて、

$$\sigma_{xx} = E e_{xx} = E e_{xx}^L, \quad \tau_{sx} = 2 G e_{sx} \quad (3a, b)$$

となる。線形化有限変位理論での基準状態での応力 σ_{xx}^0 は、Fig. 1の荷重条件を考えているので、

$$\sigma_{xx}^0 = -P^0/A + (M^0/I_{xx}) z \quad (4)$$

と与えられる。仮想仕事式(1)の外力項の内、分布力 $P_i = 0$ 、 T_i 、 u_i は関係する節点力と節点変位に相当する。独立な変位 v と ϕ の内挿関数として x に関する3次の多項式を用い、式(2)~(4)を仮想仕事式(1)に代入すれば、次に示すはり-柱の横座屈の剛性方程式が得られる。

剛性方程式 $F = K \cdot u$

ここに¹⁾

$$F = \{F_{yi} \ D_{yi} \ F_{yj} \ D_{yj} \ C_{Ti} \ C_{\omega i} \ C_{Tj} \ C_{\omega j}\}^t$$

$$u = \{v_{yi} \ \theta_{yi} \ v_{yj} \ \theta_{yj} \ \phi_{Ti} \ \lambda_{\omega i} \ \phi_{Tj} \ \lambda_{\omega j}\}^t$$

ここで、剛性マトリックス K の表現の混乱を避けるため、 y 方向のモーメントとして、Fig. 2に示す D_y を用い、このモーメント D_y との積が仕事を表す回転角として θ_y を用いた。

$$K = K_E - P^0/L \cdot K_G^1 + M^0/L \cdot K_G^2$$

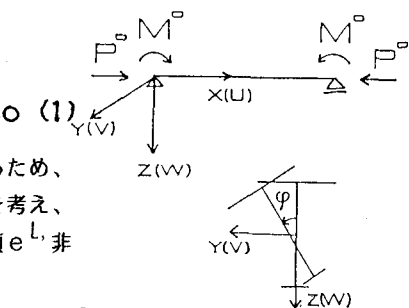


Fig. 1

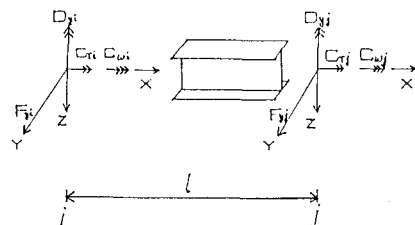


Fig. 2

$$K_E = \begin{bmatrix} \frac{EI_{yy}}{L^3} K_1 & 0 \\ 0 & \frac{EI_{yy}}{L^3} K_1 + \frac{GJ}{L^3} K_2 \end{bmatrix}, \quad K_G^1 = \begin{bmatrix} K_2 & Z_s K_2 \\ Z_s K_2 & I_s^2 K_2 \end{bmatrix}, \quad K_G^2 = \begin{bmatrix} 0 & K_3 \\ K_3^t & \beta_2 K_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 12 & & & \\ -6l & 4l^2 & & \text{sym.} \\ -12 & 6l & 12 & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & & & \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l^2}{15} & & \text{sym.} \\ -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} & \frac{6}{5} & \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l^2}{30} & \frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ \frac{11}{10} & -\frac{2l^2}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{l^2}{30} \\ \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ \frac{l}{10} & \frac{l^2}{30} & \frac{l}{10} & -\frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}$$

l: 部材長, E: 弾性係数, G: せん断剛性

$I_{yy}, I_{ww}, J, Z_s, r_s (= \sqrt{I_{yy} + I_{zz} + A Z_s^2} / A), \beta_z (= \int_A \{y^2 + (z - z_s)^2\} z dA / I_{zz})$; 断面係数

3. 剛性方程式の検証 2で誘導した剛性方程式を用いて、Fig. 3に示す1軸対称断面のはり、およびはり-柱について、座屈モーメントを計算した。その結果を、Table. 1に示す。Case. 1, Case. 2とも計算値と厳密解はほぼ一致した。

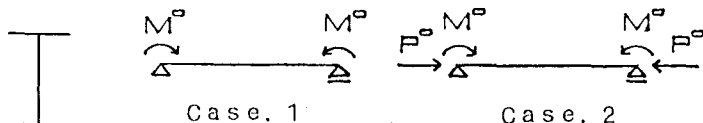


Fig. 3

	計算値	厳密解
Case. 1	191.0	191.0
Case. 2	167.8	167.7

Table. 1 (単位: t・m)

4. 面内変位の影響を考慮した横座屈の解析

はりが横座屈する際、実際には、Fig. 4aに示すようにはり面内でたわみを生じる。そして、その結果、モーメント分布も等分布とはならず、Fig. 4bに示される曲線分布となる。安全側を考慮して、Fig. 4cに示す一定のモーメント分布を仮定して座屈モーメントを計算する場合が多いが、ここでは、たわみの生じたはりを何本かの直線で近似し、それに対応してモーメント分布を、Fig. 4dに示すようなステップ状に仮定して計算を実行した。その結果を、Table. 2に示す。座屈モーメントは、有限要素法による計算の方が大きく、現実の値に近ずいたものと考えられる。

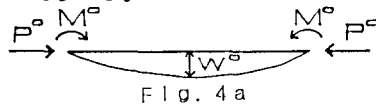


Fig. 4a

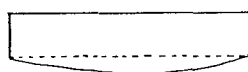


Fig. 4b



Fig. 4c

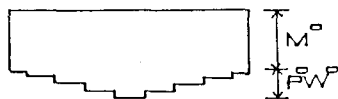


Fig. 4d

安全側の近似値 (c)	有限要素法 (d)
169.0	177.6

Table. 2

(単位: t・m)

5. 立体骨組部材に対する剛性方程式への拡張

これまで、Fig. 1に示す载荷条件で、しかも1軸対称断面について考えてきたため、 v と ϕ との連成のみが生じたが、Fig. 5に示すような载荷条件を考えたり、任意の断面について考えたりすると、 v と ϕ との連成の他に、 w と ϕ との間にも連成が生じることになる。しかし、これらの現象についても、これまでの件と同様に線形化有限変位理論に対応する剛性方程式を誘導することが可能である。そして、独立な u についての剛性方程式、 v と ϕ の連成についての剛性方程式、および w と ϕ の連成についての剛性方程式を重ね合わせて、剛性マトリックスを 14×14 のマトリックスに拡張すると、立体骨組部材に対する、はり-柱相当の剛性方程式が求まることになる。

6. まとめ ねじれを伴うはり-柱の横座屈に対する剛性方程式を陽な表現で求めた。この結果をもとに、同様の議論の展開によって、一般の立体骨組部材に対するはり-柱相当の剛性方程式を得ることができる。この剛性方程式を用いることで、任意の立体骨組構造のねじれを伴う座屈現象が解析できる。さらに、非弾性有限変位の挙動も、追跡可能になる。

参考文献1) 西野文雄、長谷川彰夫：構造物の弾性解析、新体系土木工学7、技報堂、1983年

2) 岡本舜三編：鋼構造の研究、奥村敏恵教授還暦記念、昭和52年、pp381 ~ 462