

長崎大学 正員 ○松田 浩
長崎大学 正員 崎山 毅

1. まえがき

筆者らは、ここ数年、変厚矩形板を基礎微分方程式に基づいて直接的に解析できる解法の確立を目的として変厚矩形板の研究を行なっているが、その一環として変厚矩形板の座屈解析を行なった。

基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用によって得られる解析的近似解に基づく解析法を提案し、その実用性を検証するとともに、任意の境界条件、荷重条件および変断面性をもつ変厚板の曲げに対する解法の汎用性を明らかにした⁽¹⁾。本解析法は、座屈問題にも容易に応用できる。以下にその解析方法ならびに数値計算結果を示す。

2. 変厚板の基礎微分方程式

平板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすれば、変厚板を含む一般的な矩形板の座屈に関する基礎微分方程式は、断面力および変形の無次元量を導入して、次のような連立偏微分方程式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} + N_x \frac{\partial X_7}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial X_3}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_5}{\partial \xi} = \mu X_2, \quad \frac{\partial X_4}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_3}{\partial \xi} = \mu X_1, \quad \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \xi} = I X_4 \\ \nu \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_7}{\partial \xi} &= I X_5, \quad \frac{\partial X_2}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \xi} = J X_3, \quad \frac{\partial X_8}{\partial \eta} + X_7 = k X_2, \quad \frac{\partial X_8}{\partial \xi} + \mu X_6 = \mu k X_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $N_x = N_x(\eta)$: 面内圧縮力、 E : 弾性係数、 G : せん断弾性係数、 ν : ポアソン比、 $R = R(\eta)$: 板厚、 $D = ER^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 $t_s = R/1.2$

$(X_1, X_2) = (Q_y, Q_x) a^2/D_0(1-\nu^2)$, $(X_3, X_4, X_5) = (M_{xy}, M_y, M_x) a/D_0(1-\nu^2)$, $(X_6, X_7) = (\theta_y, \theta_x)$, $X_8 = w/a$, $x = a\eta$, $y = b\xi$, a, b : 矩形板の横縦の辺長, $\mu = b/a$

$N_x = \mu l N_x/N_{x0}$, $l = N_{x0} a^2/D_0(1-\nu^2)$, N_{x0} : 基準面内圧縮力, $I = \mu(1-\nu^2)(R_0/R)^2$, $J = 2\mu(1+\nu)(R_0/R)^2$, R_0 : 基準板厚, $k = ER_0^3/10Ga^2R$, $D_0 = ER_0^3/12(1-\nu^2)$: 基準板剛度

3. 基礎微分方程式の解析的近似解

連立偏微分方程式(1)の各式を領域 $[\xi, \eta]$ において面積積分し積分方程式に変換する。次に等間隔の数値積分法の応用により、積分方程式を離散表示すると、任意の分割点における無次元化された各断面力および変形 X_{pij} は次式のように表わすことができる。

$$X_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{\eta=0}^1 \beta_{t\eta} A_{pt} [X_{t\eta 0} - X_{t\eta 1}(1-\delta_{t\eta})] + \sum_{\xi=0}^1 \beta_{t\xi} B_{pt} [X_{t\xi 0} - X_{t\xi 1}(1-\delta_{t\xi})] + \sum_{\eta=0}^1 \sum_{\xi=0}^1 \beta_{t\eta} \beta_{t\xi} C_{pt\xi\eta} X_{t\xi\eta} (1-\delta_{t\eta}\delta_{t\xi}) \right\} \quad (2)$$

ここに、 $P = 1 \sim 8$, $\beta_{t\eta}$: 等分割数値積分の重み係数(台形則), $\delta_{t\eta}$: Kronecker's delta

(2)式は、任意の分割点の断面力および変形 X_{pij} が、境界辺上の点の諸量 $(X_{r\eta 0}, X_{s\xi 0})$ のみで表わせることを示しており次式のように書ける。

$$X_{pij} = \sum_{\eta=0}^1 \left(\sum_{t=1}^8 a_{pij\eta} d X_{r\eta 0} + \sum_{\xi=0}^1 b_{pij\xi} d X_{s\xi 0} \right) \quad (3)$$

ここに、 $X_{r\eta 0}, X_{s\xi 0}$ はいわゆる積分定数で、対辺の境界条件によって決定されるべきものである。また、 $a_{pij\eta} d, b_{pij\xi} d$ は、伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

4. 座屈条件式および座屈モード

境界辺($\eta=0, \xi=0$)上の未知量 $(X_{r\eta 0}, X_{s\xi 0})$ に関する連立方程式は、未知量を $[X]$ 、その係数マトリックスを $[D]$ とすれば、

$$[D][X] = 0 \quad (4) \quad \text{と表わすことができる。}$$

(4)式より、 $|D|=0$ が変厚板を含む矩形板の座屈条件式であり、Trial and errorによって、その座屈固有値を求める。また座屈モードは、

$X_{8ij} = \sum_{d=1}^6 (\sum_{f=0}^6 a_{8ijfd} X_{rfo} + \sum_{g=0}^6 b_{8ijgd} X_{sog})$
で表わされる。ここに X_{rfo} 、 X_{sog} は(4)式で、 $\alpha_1=C$ (任意定数)として求める。

5. 数値計算結果および考察

はじめに、等厚板に関して本解析法による数値解の収束性および精度を明らかにするために、一方向に均一に圧縮された単純支持長方形板および曲げと圧縮の総合作用下の単純支持長方形板の座屈解析を行なった。その数値計算結果をTimoshenkoの解析解とともに、表1, 2, 3に示す。なお表中補外値とは、分割数($M=4, 8$)および($M=6, 8$)における数値解をRichardsonの補外公式に代入した値で、各々 R_{48} 、 R_{68} と記す。

いずれの解析においても、本解析法に基づく数値解は、分割数 M の増加とともに一様に収束していることがわかる。また8分割程度の比較的小さい分割の値でも十分実用性のある解が得られている。またRichardsonの補外公式による推定値はTimoshenkoの解析解に極めて近づくことがわかる。

図1は、 $\mu=a/b$ と座屈数値因子 λ との関係を表わしたものである。図中の実線は8分割における計算結果で、点線は補外値(R_{48})である。また、 $m=1, 2$ は各々、1次、2次の座屈モードを表わす。同図は文献(3)の結果とはほぼ一致している。

次に本解析法を変厚板の問題に適用した。その計算結果を表4, 5に示す。各表に示された諸量は、表中国のような変断面性をもち変厚板を対象とした場合の計算結果である。同表より、純曲げが作用するような場合、変厚板を使用した方が座屈固有値が大きくなることがわかる。

6. 結語

変厚板の座屈の一解析法を提示した。その数値解の収束性および精度は良好である。今回は四辺単純支持のみを取り扱ったが、他の境界条件にも適用できる。

(参考文献)

- (1) 崎山松田, 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木論集 338号/1983,
- (2) 篠崎松田, 応用数値計算法入門(下) コロナ社,
- (3) Timoshenko, Gere, Theory of Elastic Stability

表1. 一方向に均一に圧縮された単純支持板 ($\mu=1.0, \nu=0.3$)

分割数 M	4	6	8	10	12
λ	4.450	4.190	4.105	4.067	4.046
補外値	$(R_{48}) 3.990$		$(R_{68}) 3.996$		
T.A.S.	4.00				

T.A.S.: Timoshenko's Analytical Solution

表2. 三角形型圧縮力を受ける単純支持板 ($\mu=0.6, \nu=0.3$)

分割数 M	4	6	8
λ	11.11	10.32	10.06
補外値	$(R_{48}) 9.71$		$(R_{68}) 9.73$
T.A.S.	9.7		

T.A.S.: Timoshenko's Analytical Solution.

表3 純曲げを受ける単純支持板 ($\mu=0.6, \nu=0.3$)

分割数 M	4	6	8
λ	36.64	28.60	26.48
補外値	$(R_{48}) 23.09$		$(R_{68}) 23.75$
T.A.S.	24.1		

T.A.S.: Timoshenko's Analytical Solution

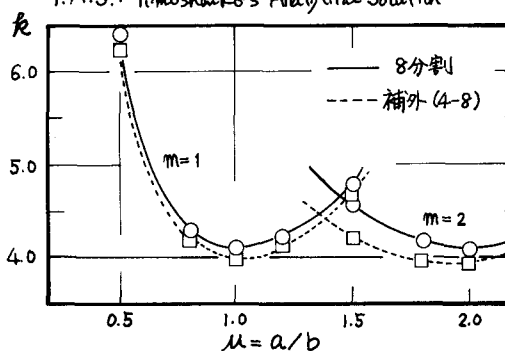


図1 μ と λ の関係 ($\nu=0.3$)

表4

一様圧縮力を受ける
変厚板 ($\mu=1.0, \nu=0.3$)

	$\alpha=0.9$ $\beta=1.1$	$\alpha=0.8$ $\beta=1.2$	$\alpha=1.0$ $\beta=1.0$
$M=8$	4.084	4.018	4.105
補外値	3.972	3.902	3.996

表5

純曲げを受ける変厚板
($\mu=0.6, \nu=0.3$)

	$\alpha=0.9$ $\beta=1.1$	$\alpha=0.8$ $\beta=1.2$	$\alpha=1.0$ $\beta=1.0$
$M=8$	30.27	34.36	26.48
補外値	27.34	31.24	23.75