

京都市 正員 白鳥 良一
 大阪市立大学 正員 園田恵一郎
 大阪市立大学 正員 堀川都志雄

1 はしがき 3次元等方性問題の解析に対して、著者らは伝達マトリックス法(はさみ込み法)と級数解法との併用法を提案し、小型計算機を用いて積層板等の多層問題の3次元弾性解析を行えることを示した¹⁾。本研究では直交異方弾性体の変位関数にフーリエ変換を施し、数値的な逆変換により有限厚さをもつ無限板の解を誘導し、この解を上記の伝達マトリックス法に適用することにより直交異方性多層弾性問題の解法を試みた。

2 有限厚さをもつ無限板のフーリエ変換

直交異方弾性体のフックの法則は次のように示される。 「E: 弾性定数マトリックス

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1) \quad \text{ここで、} \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})^T,$$

直交異方弾性体の変位関数 F_i° ($i=1, 2, 3$) の基礎式は次のように与えられる²⁾。

$$\nabla^2(x, y, z) F_i^\circ = -2B_5 B_7 / B_1 B_4 X_i, \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

ここで、 X_i ($i=1, 2, 3$) は x, y, z 方向の物体力である。 $\nabla^2(x, y, z)$ は微分演算子である。

また、変位と変位関数との関係式は、例えば関数 F_3° について示せば、

$$2B_5 U = L_{13} F_3^\circ, \quad 2B_5 V = L_{23} F_3^\circ, \quad 2B_5 W = L_{33} F_3^\circ \quad (3)$$

ここで、 L_{13}, L_{23}, L_{33} は微分演算子である。

有限厚さをもつ無限板に x, y 方向に対称荷重が作用する問題の場合、物体力が零である変位関数は

$$F_3^\circ = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[C_1 \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_2 \operatorname{sh} \lambda_1 z + (C_3 \operatorname{ch} \lambda_2 z + C_4 \operatorname{sh} \lambda_2 z) \cos \lambda_2 z + (C_5 \operatorname{ch} \lambda_3 z + C_6 \operatorname{sh} \lambda_3 z) \sin \lambda_3 z \right] \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (4)$$

ここで、 λ_i ($i=1, 2, 3$): 式(2)の特性方程式の根, $C_1 \sim C_6$: 無限板の上下面での境界条件より決定される積分定数, $\operatorname{ch} \lambda_1 z = \cosh \lambda_1 z, \operatorname{sh} \lambda_1 z = \sinh \lambda_1 z$

3 伝達マトリックス法(はさみ込み法)の概要

n 層からなる多層問題を考えるために、任意の層 i に着目する。層 i における上面の変位 $\bar{U}^i$ および伝達応力 $\bar{X}^i$ は、下面の変位 $\bar{U}^i$ 、伝達応力 $\bar{X}^i$ と層 i の格向行列によって次のように関係づけられる。

$$\begin{bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \\ 1 \end{bmatrix}_i = \mathbb{L}_i \begin{bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \\ 1 \end{bmatrix}_i = \mathbb{R}_i \begin{bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad (6)$$

ここで、 $\bar{U} = (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})^T$, $\bar{X} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})^T$, $\bar{U}, \bar{X}$: 変位 $\bar{U}$ および応力 $\bar{X}$ のフーリエ変換の係数,

U, V, W は x, y, z 方向の変位, また X, Y, Z は x, y, z 方向の接合面に働く応力である。

通常の伝達マトリックス法は、式(5)あるいは(6)より始点(0)あるいは終点(n)の状態ベクトルを決定し、さらにこれらを用いて順次内点の状態ベクトルを計算する方法である。また、はさみ込み法は式(5), (6)の両式より構成され、最上面と最下面で規定される境界量のみを用いて内点の状態ベクトルを求める方法であり、例えば、最上面で応力が、最下面で変位が規定される場合には次のような式が得られる。なお、物体力を零としている。

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_n \\ \bar{X}_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、

$$a_i = \mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \cdots \mathbb{L}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad b_i = \mathbb{R}_n \mathbb{R}_{n-1} \cdots \mathbb{R}_{i+1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

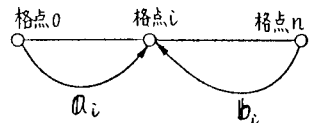


図-1 はさみ込み法

式(7)より、 $i = 0, 1, \dots, n$ と順次 i を変化させて全格点での状態ベクトルを求める。

4 数値計算例

剛基礎にある直交異方性夕層無限板に鉛直荷重が作用する場合(図-2)、従来の伝達マトリックス法とはさみ込み法を用いた結果の比較を表-1に示す。なお、弾性定数は各層とも同一であり、 $C_{12}/C_{11} = 0.57$, $C_{13}/C_{11} = 0.71$, $C_{22}/C_{11} = 2.14$, $C_{33}/C_{11} = 1.29$, $C_{44}/C_{11} = 0.29$, $C_{55}/C_{11} = 0.57$, $C_{66}/C_{11} = 0.71$ とする²⁾。

表-1 状態ベクトルの比較(鉛直荷重)

状態ベクトル	格点	伝達マトリックス法		はさみ込み法(10層)		はさみ込み法(50層)	
		単	倍	単	倍	単	単層板
W	0	0.7360	0.7359	0.7359	0.7359	0.7358	0.7358
	2	2.1E 04	0.3666	0.3665	0.3665	0.3665	0.3665
	4	8.4E 14	7.0E 05	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711
	6	1.4E 26	9.7E 15	0.0793	0.0793	0.0793	0.0793
	8	2.9E 37	1.3E 26	0.0282	0.0282	0.0282	0.0282
	10	6.5E 48	1.7E 36	0.0	0.0	0.0	0.0
Z	0	-0.5203	-0.5203	-0.5203	-0.5203	-0.5203	-0.5203
	2	1.8E 05	-0.2482	-0.2478	-0.2478	-0.2478	-0.2478
	4	5.6E 15	-5.2E 05	-0.0996	-0.0996	-0.0996	-0.0996
	6	8.4E 26	-5.1E 15	-0.0527	-0.0527	-0.0527	-0.0527
	8	1.8E 38	-7.9E 25	-0.0341	-0.0341	-0.0341	-0.0341
	10	4.1E 49	-1.1E 36	-0.0229	-0.0229	-0.0229	-0.0229

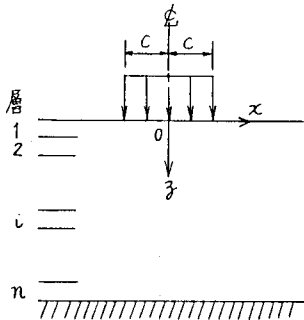


図-2

図-3,4は、剛基礎にある夕層無限板の弾性定数が最上層から最下層まで直線的に変化する場合の応力 σ_z , τ_{xz} の等高線を示す。最下層の弾性定数は最上層の弾性定数の2倍である。また、図中の破線は弾性定数が一樣な場合の結果を表している。

5 あとがき

直交異方性夕層問題を従来の伝達マトリックス法を用いて解析する場合、倍精度演算でも誤差が生じており、これは等方性の夕層問題ではみられなかった。しかしながら、はさみ込み法によれば層数が増えても単精度演算で十分精度の良い結果が得られることがわかった。

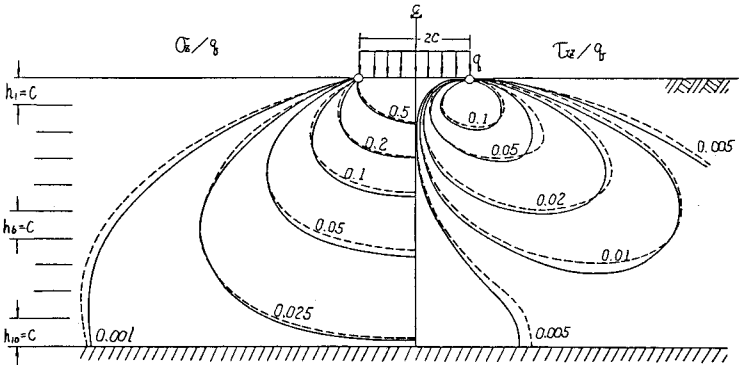


図-3 応力 σ_z , τ_{xz} の等高線(鉛直荷重)

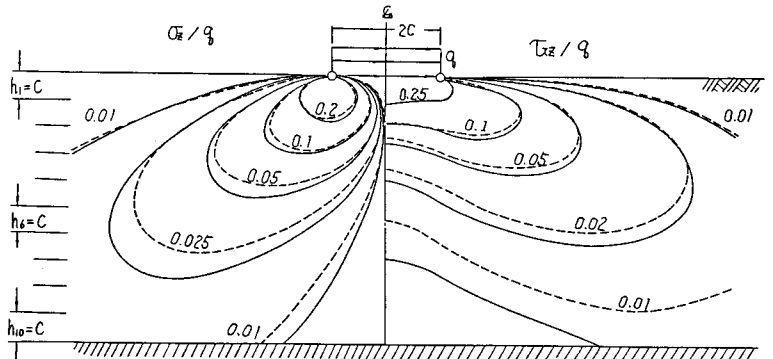


図-4 応力 σ_z , τ_{xz} の等高線(水平荷重)

参考文献 1)園田,堀川,白鳥,3次元弾性問題に対する伝達マトリックス級数解法の適用,土木学会論文報告集, No.339, 1983年11月, p.41~50.

2) Sonoda, K. and Horikawa, T., Displacement functions of an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problem, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, 1979, p.117-126.