I-20　球状探索面を用いた反復法

東京都立大学 ○正会員 野上 邦栄
東京都立大学 　正会員 伊藤 文人

1. まえがき

近年の電子計算機の進歩により数値計算の能力高上がはかられ，さらに有限要素法などによる行列計算の普及に伴い，連立非線形方程式に対する数値計算法が発展してきた。この連立非線形釣合方程式の近似解法大半は，逐次近似の考え方にもとずいており，その代表的な解法が反復法である。この解法を用いる場合，求める解(釣合点)に加える強制条件の選択が重要になる。一般に，このための独立変数として荷重を，あるいは変位を選択することにより各々荷重増分法，変位増分法と呼ばれた解法が多く利用されている。

しかし，荷重増分法は釣合経路に荷重極大値を含む場合，その極大値近傍において解の精度が得られない。また，変位増分法は，多自由度系の場合，独立変数として用いるべき変位成分の選択方法が必らずしも明らかでない。特に，特定の点の近傍において釣合経路が急激にその方向を変えるような系の場合，特定の変位成分のみを主要な変数と見なすことは適当でない。したがって，理想的には荷重と変位成分から成る空間において何らかの定式化ができることが望ましい。この考え方にもとずく解法が，弧長増分法である。しかし，従来の弧長増分法は，増分ベクトルや修正ベクトルの計算法によっては必らずしも十分な結果が得られない。[1),2)]

上述のことを踏まえ，本報告では，球状空間曲面を探索面として定式化した弧長増分法を採用し，さらに特別な消去法を導入することにより，精度よく釣合経路の追跡を行なうことができる一般的解法について述べている。

2. 球状探索面

いま，n個の変位変数と1個の荷重変数

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\} \qquad (1)$$

から成る空間において，球状空間曲面は次式のように定式化できる。

$$(\mathbf{a}-\mathbf{a}_m)^T(\mathbf{a}-\mathbf{a}_m) - R^2 = 0 \qquad (2)$$

この式は，Fig.1に示すように釣合点$\mathbf{a}_m$を中心に，半径Rの球状の探索面を表わしている。ここで球面半径Rは一定にする必要はなく，釣合経路の曲率の小さい所では粗らく，曲率の大きい所では細かい方が良い。また，変数$\mathbf{a}$の中に他の変数に比べ大きな値を持つ1変数が有る場合，釣合経路によってはFig.2のように釣合点(m)から離れた釣合点$(m+1)$が求まってしまう。したがって変数の大きさがそろうように尺度変換を行なうことが望ましい。

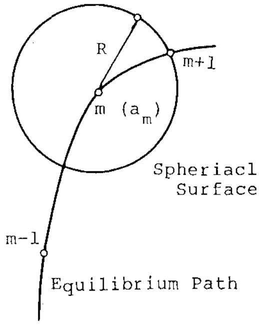

Fig. 1

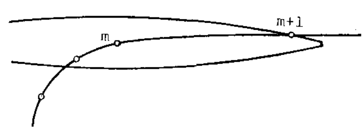

Fig. 2

以上のことを考慮するならば，球状探索面は求めようとする釣合経路と交差し，計算される釣合点相互の距離が離れすぎたりすることがなくなる。

3. 基本解法

式(1)の変数が全て無次元化されているものとすると，連立非線形釣合方程式は次式のように与えられる。

$$F_i(\mathbf{a}) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

尺度変換のため，αを定数として

$$\alpha_i g_i = a_i \qquad (4)$$

の関係を持つ変数g_iを導入するならば，式(3)は次のように書き換えられる。

$$G_i(\mathbf{g}) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (5)$$

なお，式(4)のα_iは目的に応じて決めれば良い。

同様に，球面制約式(2)は次式のようになる。

$$(\mathbf{g}-\mathbf{g}_m)^T(\mathbf{g}-\mathbf{g}_m) - R^2 = 0 \qquad (6)$$

いま，逐次計算において第(k)回目の近似値を$\mathbf{g}^{(k)}$とすると，式(5)は次式で与えられる。Φ_iは不平衡量

$$G_i(\mathbf{g}^{(k)}) = \Phi_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (7)$$

また，$\mathbf{g}^{(k)}$は常に球面上にあるものとすれば，式(6)は次式のように与えられる。

$$(q^{(k)}-q_m)^T(q^{(k)}-q_m)-R^2=0 \qquad (8)$$

したがって，$q^{(k)}$ の修正量 $\Delta q^{(k)}$ は，式(7)と式(8)を考慮すると次式から求めることができる。

$$G_{i,j}(q^{(k)})\Delta q_j^{(k)}+\phi_i=0 \quad (i=1,2,\cdots n) \qquad (9\text{-}1)$$

$$(q_j^{(k)}-q_{mj})\Delta q_j^{(k)}=0 \quad (j=1,2,\cdots n+1) \qquad (9\text{-}2)$$

また，式(9)は次式のように表わすこともできる。

$$A_{ij}\Delta q_j^{(k)}+\phi_i=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n+1) \qquad (10)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} A_{ij}&=G_{i,j}(q^{(k)}) \\ A_{n+1\,j}&=q_j^{(k)}-q_{mj} \end{aligned}\right\}\left(\begin{aligned} i&=1,2,\cdots,n \\ j&=1,2,\cdots,n+1\end{aligned}\right) \qquad (11)$$

$$\phi_{n+1}=0$$

この時，全体係数行列 A は正方となる。

ところで，式(10) は線形式であるため，修正量 $\Delta q^{(k)}$ が微小でない場合 $(q^{(k)}+\Delta q^{(k)})$ は，所定の球面から外れてしまう。したがって，次回の近似値は，Fig.3のように，q_m と $(q^{(k)}+\Delta q^{(k)})$ を結ぶ直線上で所定の球面に引きもどし修正を行なわなければならない。これは，次式のように与えれば良い。

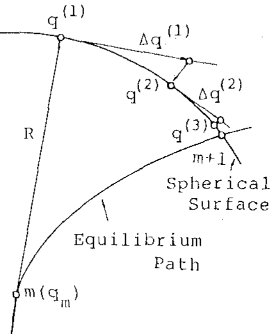

Fig. 3

$$q^{(k+1)}=q_m+\frac{q^{(k)}+\Delta q^{(k)}-q_m}{|q^{(k)}+\Delta q^{(k)}-q_m|}\cdot R \qquad (12)$$

このようにして収束計算を行なうことになる。

4. 球面制約式を含む連立1次方程式の消去法

式(10)の連立1次方程式の解法は，次のような手順による特別な消去法を導入している。

① 式(10)の第1行から第n行に含まれる A_{ij} の中で最大絶対値を探し出し，それを軸にして全ての式から概当する列を消去する。この時，その係数を含む行を第1行に移しておく。

② 同様に，第2行から第n行に含まれる A_{ij} の中で最大絶対値を探し出し，それを軸にして全ての式から概当する列を消去する。同時に，その行を第2行に移す。

③ 同様の方法を，第n行までくり返す。その結果，n個の変数についての消去が完了し，S番目の変数だけが残されている。この時，すべての式は，

$$\Delta q_i=-k_i\Delta q_s-h_i \quad (i\neq S) \qquad (13)$$

$$\Delta q_s=-h_s \qquad (14)$$

の形に書くことができる。式(14)より Δq_s が定まれば，残りの全ての変数は従属的に求められる。その意味で q_s を「主変数」と呼ぶことができる。

以上の消去法は，解の精度が常に保たれるばかりでなく，自動的に最適主要変数が選べる長所を持つ。

ところで，上記の計算中，行の置き換えを考慮しながら軸となる係数の値を用いて順次行列式 det|A|の値が求められる。特にこの行列式の符号は，「不要な釣合経路にとび込んだ場合や釣合経路上で逆向きに進み始めた場合などの判断に利用できる。

さらに，収束した状態では,式(10)の右辺に含まれた不平衡量に関する h_i は全て零と見なすことができる。この時 k_i は Δq_s を単位量とするような接線ベクトルの成分を表わしている。したがって，次回の初期近似値は，この延長上で現在の収束点からRの距離の位置に仮定すれば良い。

5. 数値計算例

球状探索面を用いた本解法により簡単な数値計算を試みた。

Fig.4は，両端ヒンジの柱による弾塑性解析結果を示している。

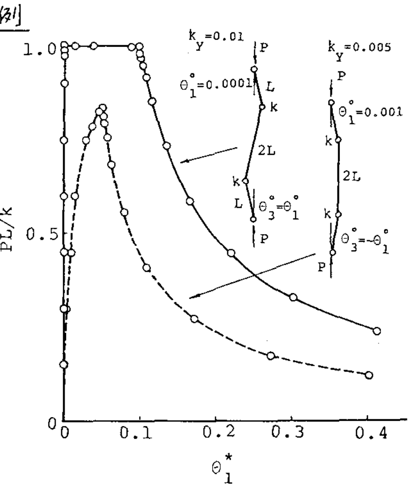

Fig. 4

ここで球面半径の初期値は $R^\circ=0.15$,また尺度変換係数は回転角については全て $\alpha=0.1$，荷重は $\alpha=1.0$ として計算した。また収束回数が，最大収束回数を越える時には球面半径を次式のように縮小している。

$$R=R\cdot\frac{(\beta+N_s\cdot N_c)}{(\beta+N_c^2)} \qquad (15)$$

ここで N_c は釣合点を求めるのに要した収束回数,N_s は理想とする最大収束回数($N_s=5$), βは任意の常数($\beta=3$)である。Fig.4から明らかなように，釣合径路の急変する系に対して十分な精度の結果が得られた。

文献 1) E. Riks : An incremental approach to solution of snapping and buckling problem ; Int. J. Solid Stru. Vol15 1979

2) 野上・伊藤・尾崎: 有限剛体要素モデルを用いた骨組部材の弾性解析 JSSC第17回マトリックス解析法研究発表論文集，1983