

早稲田大学理工学部 正会員 ○依田照彦
早稲田大学大学院 学生会員 中島哲士

1. まえがき

曲線橋の設計では、曲線橋の構成要素である曲線ばりを直線ばりの集合に置き換え、折れ線で近似したモデルを作成し、それに骨組構造解析を適用して設計計算を行うことが多い。この近似解法が妥当であることは線形問題の場合には既に確かめられている¹⁾。しかしながら、非線形問題に対しても折れ線要素近似が妥当であるという保証はない。

そこで、本報告では、薄肉平面円弧ばりを例に採り、非線形問題における直線はり要素近似の妥当性を検討した。一般に、有限要素解の誤差は離散化誤差と丸め誤差よりなり、折れ線要素近似のように比較的要素分割が荒い場合には離散化誤差が支配的になる。その上、離散化誤差は近似解の局所的な性質にも依存している。それ故、差分方程式の離散化誤差の評価手法を直線はり要素近似に適用して非線形のつり合い方程式を誘導し、この支配方程式を円弧ばりの厳密なつり合い方程式と比較することにより、直線はり要素近似に基づく非線形解析の妥当性の検討を行った。

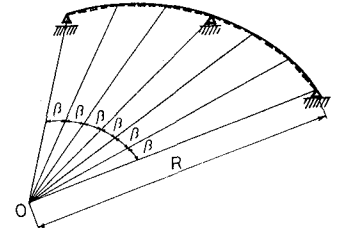


Fig.1 円弧ばりの直線はり要素近似

2. 混合法による直線はり要素近似

直線はり要素の混合要素マトリックスは次のHellinger-Reissnerの原理を用いて求めることができる²⁾。

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_{z_1}^{z_2} N \left(w' + 1/2(v')^2 + 1/2(u')^2 \right) dz - \int_{z_1}^{z_2} M \left(v'' + u''\theta \right) dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} M_0 \left(u'' - v''\theta \right) dz - \int_{z_1}^{z_2} B \left(\theta'' + 1/2u''v'' - 1/2u''v' \right) dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} 1/2M_0(\theta')^2 dz - \int_{z_1}^{z_2} N^2/(2EA) dz - \int_{z_1}^{z_2} M^2/(2EI) dz - \int_{z_1}^{z_2} M_0^2/(2EJ) dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} B^2/(2EJ_\omega) dz - \int_{z_1}^{z_2} T^2/(2GJ_t) dz - (F_2w_2 + F_1w_1) + (M_2v_2' + M_1v_1') - (P_2v_2 + P_1v_1) + (\dot{M}_2u_2' + \dot{M}_1u_1') \\ & - (Q_2u_2 + Q_1u_1) - (T_2\theta_2 + T_1\theta_1) + (B_2\theta_2' + B_1\theta_1') \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $(\cdot)'$ は部材軸方向座標 z に関する微分を表わし、断面力と変位はFig.2に示した通りである。また、 EA : 軸剛性、 EI : 面内曲げ剛性、 EJ : 面外曲げ剛性、 EJ_ω : そり剛性、 GJ_t : ねじり剛性である。

線形補間関数を用いて、変位成分(w, v, u, θ)と断面力(N, M, M_0, B, T, M_P)を要素内で近似し、 Π_R の第1変分 $\delta \Pi_R$ を零とおけば、直線はり要素の混合要素マトリックスが求められる。

今、簡単のために、薄肉断面部材として二軸対称断面部材を考え、図心軸を部材軸に選び、曲率面内に集中荷重を受ける円弧ばりの面内問題について定式化の手順を示す。

直線はりの混合形のカ-変位関係式は、面内非線形問題に対して、直線はりに関する量であることを明確にするため横棒 $(\bar{\cdot})$ を用いて、次のように表わせる。

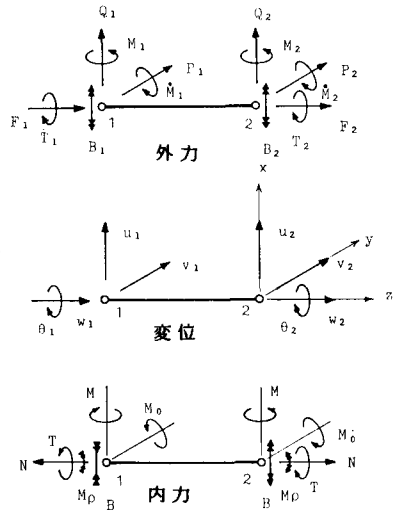


Fig.2 直線はり要素

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $\{\bar{M}_1^T, \bar{M}_2^T\}$ 、 $\{\bar{m}_1^T, \bar{m}_2^T\}$ 、 $\{L_1^T, L_2^T\}$ はそれぞれ、

$$\{\bar{M}_1^T, \bar{M}_2^T\} = \{F_1, 0, 0, P_1, F_2, 0, 0, P_2\} \quad (3)$$

$$\{\bar{m}_1^T, \bar{m}_2^T\} = \{W_1, N_1, M_1, V_1, W_2, N_2, M_2, V_2\} \quad (4)$$

$$\{L_1^T, L_2^T\} = \{0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1\} \quad (5)$$

とかけ、線形混合マトリックス $[\bar{Q}_1]$ と非線形混合マトリックス $[\bar{G}_1]$ はそれぞれ次のようになる。

$$[\bar{Q}_1] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Sym.}) \quad (6)$$

$$[\bar{G}_1] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

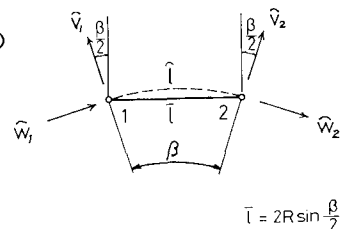


Fig.3 曲線座標系への座標変換

そこで、円弧ばりのつり合い方程式との比較を考え、 $\{\bar{M}_1^T, \bar{M}_2^T\}$ と $\{\bar{m}_1^T, \bar{m}_2^T\}$ に座標変換を施し、曲線座標系での力-変位関係式を求める。ただし、 $\hat{\cdot}$ は曲線座標系における値を示す。

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{T}^T & 0 \\ 0 & \hat{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{T}^T & 0 \\ 0 & \hat{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここに、座標変換マトリックス $\hat{T}_\pm$ は、一要素の張る中心角を β とすれば、次式で表わされる。(Fig.3参照)

$$\hat{T}_\pm = \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & \pm \sin \frac{\beta}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm \sin \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

表-1 折れ線近似モデルによる支配方程式

したがって、隣接する2要素に着目し、混合形の力-変位マトリックスを作成すると、一般形として、

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{i-1} \\ \hat{M}_i \\ \hat{M}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & 0 \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & \hat{K}_{23} \\ 0 & \hat{K}_{32} & \hat{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{m}_{i-1} \\ \hat{m}_i \\ \hat{m}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

が得られる。この式の下線部はi節点における支配方程式を示しているので、隣接要素の断面力と変位をi節点回りで曲線要素の部材長 $\hat{l}$ についてTaylor展開し、マトリックス $\hat{K}_{21}$ 、 $\hat{K}_{22}$ 、 $\hat{K}_{23}$ の要素についても $\hat{l}$ のべき級数に展開した後、 $\hat{M}_i$ を零とおくと、 $\hat{l}$ のべき乗の順に整理された4個の方程式が得られる。さらに、要素長 $\hat{l}$ を零に近づけた極限状態を考えると、4個の支配方程式に収束して行くことが分る。

得られた支配方程式は、面内問題に関する限り、厳密な支配方程式と一致した。そこで、面内挙動(点線部)をも含む一般的な三次元挙動についての結果を表-1に示す。表-1より、有限変位問題に対しても折れ線要素近似が有効であることが分る。

参考文献

- 1) 依田照彦：第38回土木学会年次学術講演会講演概要集、I-68, PP.135-136, 1983.
- 2) Gallagher, R.H.: 有限要素解析の基礎、丸善、1976

つり合い方程式	
$\hat{N}' + \frac{\hat{N}'}{R} + \frac{\hat{Q}}{R}(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R}) - \frac{1}{R}(\hat{M}_0 \hat{\theta})' + \frac{1}{R} \hat{M}_0 \hat{Q}' = 0$	
$\frac{\hat{N}}{R} - \hat{M}'' - (\hat{N}(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R}))' + (\hat{M}_0 \hat{\theta})'' - \frac{1}{R}(\hat{M}_0 \hat{Q}')' = 0$	
$- \hat{M}_0'' + \frac{\hat{Q}}{R} - \frac{\hat{T}}{R} + (\hat{M}_0(\hat{\theta}' - \frac{\hat{Q}}{R}))' - (\hat{N} \hat{Q}')'$	
$- (\hat{M} \hat{\theta})'' - \frac{1}{R}(\hat{M}_0(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R}) - \hat{N} \hat{Q}')' = 0$	
$- \frac{\hat{M}_0}{R} - \hat{Q}'' + \hat{T}' - (\hat{M}_0(\hat{\theta}' - \frac{\hat{Q}}{R}))' - \frac{1}{R} \hat{M} \hat{\theta}'' - \hat{M} \hat{Q}''$	
$+ \hat{M}_0(\hat{\varphi}'' - \frac{\hat{Q}'}{R}) = 0$	
断面力と変位の関係式	
$\frac{\hat{N}}{EA} = \hat{Q}' + \frac{\hat{Q}}{R} + \frac{1}{2}(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R})^2 + \frac{1}{2}(\hat{Q}')^2$	
$\frac{\hat{M}}{EI} = - \hat{\varphi}'' + \frac{\hat{Q}'}{R} - \hat{Q}'' \hat{\theta} - \frac{1}{R}(\hat{Q}')^2$	
$\frac{\hat{M}_0}{EJ_\omega} = - \hat{Q}'' - \frac{\hat{Q}}{R} - (\hat{\varphi}'' - \frac{\hat{Q}'}{R}) \hat{\theta} - \frac{\hat{Q}'}{R}(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R})$	
$\frac{\hat{T}}{EJ_\omega} = - \hat{\theta}'' + \frac{\hat{Q}'}{R} + \frac{1}{2}(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R}) \hat{Q}' - \frac{1}{2} \hat{Q}''(\hat{\varphi}' - \frac{\hat{Q}}{R})$	
$\frac{\hat{M}_\theta}{EJ_\theta} = \frac{1}{2}(\hat{\theta}' - \frac{\hat{Q}'}{R})^2$	