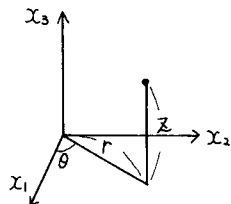


福井大学大学院 学生員 北村 康孝
福井大学工学部 正員 福井 卓雄

本報告では 境界積分方程式を用いた軸対称弾性体の解析について述べる。軸対称弾性体の境界上に分布させた一重層密度と、境界条件とを周方向にFourier展開すると、それらの係数関数の間には項別に独立な積分関係式が得られる。各項ごとにその積分方程式を解いて、それらの解を重ね合わせることにより軸対称弾性体の非軸対称問題の解が得られる。

Fourier展開による項別積分

軸対称弾性体中の変位 $U(x)$ が境界上に分布した密度 p_i による一重層ポテンシャルにより、 $U(x) = \int_{\partial B} G_{ij}(x; y) p_j(y) dS_y$ として表されると仮定する。軸対称問題を扱い易くするために右図の様に円柱座標系をとり、 $U(x)$ を円柱座標成分で表すと、



$$U_k(\bar{x}) = \int_{\partial B} G_{kl}(\bar{x}; y) p_l(y) dS_y, \quad G_{kl}(\bar{x}; y) = Q_{ki}(\theta) G_{ij}(\bar{x}; y) Q_{lj}(\varphi), \quad [Q_{ki}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

となる、 G_{ij} は Kelvin 核である。 $Q_{ki}(\theta)$ は直交変換行列であり、小文字の添字と大文字の添字はそれぞれ直交座標成分と円柱座標成分を表す。また、以下では点 $x: (x_1, x_2, x_3)$ について (r, θ, z) 、点 $y: (y_1, y_2, y_3)$ について (ρ, φ, z) と取った。

密度 p の Fourier 展開 $p(\bar{y}) = \frac{1}{2} p^{(0)}(\bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ p^{(n)}(\bar{y}) \cos n\varphi + \tilde{p}^{(n)}(\bar{y}) \sin n\varphi \}$ を用いて (1) 式を表す。

$$U_k(\bar{x}) = \int_{\partial B} \left[\frac{1}{2} G_{kl}^{(0)}(\bar{x}; y) p^{(0)}(\bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ G_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) p^{(n)}(\bar{y}) + \tilde{G}_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) \tilde{p}^{(n)}(\bar{y}) \} \right] dS_y \quad (2)$$

ここに $G_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) = \int_0^{2\pi} G_{kl}(\bar{x}; \bar{y}) \cos n\varphi \cdot \rho d\varphi$, $\tilde{G}_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) = \int_0^{2\pi} G_{kl}(\bar{x}; \bar{y}) \sin n\varphi \cdot \rho d\varphi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$

点 x , y に対して点 x , y はそれぞれ (r, z) , (ρ, z) 面内の点を表す。従って (2) 式の ∂B は (ρ, z) 面内の境界であり、 dS_y はその線素である。

(2) 式の左辺 U_k の周方向での Fourier 展開、 $U_k(\bar{x}) = \frac{1}{2} U_k^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ U_k^{(n)}(x) \cos n\theta + \tilde{U}_k^{(n)}(x) \sin n\theta \}$ を考える。すると次の一群の積分関係式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}^{(0)}(x) = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{13} \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ \Gamma_{31} & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix}^{(0)} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}^{(0)}(y) dS_y \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}^{(n)}(x) = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{13} \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ \Gamma_{31} & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix}^{(n)} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}^{(n)}(y) dS_y + \int_{\partial B} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Gamma}_{12} & 0 \\ \tilde{\Gamma}_{21} & 0 & \tilde{\Gamma}_{23} \\ 0 & \tilde{\Gamma}_{32} & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \end{bmatrix}^{(n)}(y) dS_y, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix}^{(n)}(x) = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} 0 & \Gamma'_{12} & 0 \\ \Gamma'_{21} & 0 & \Gamma'_{23} \\ 0 & \Gamma'_{32} & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}^{(n)}(y) dS_y + \int_{\partial B} \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}'_{11} & 0 & \tilde{\Gamma}'_{13} \\ 0 & \tilde{\Gamma}'_{22} & 0 \\ \tilde{\Gamma}'_{31} & 0 & \tilde{\Gamma}'_{33} \end{bmatrix}^{(n)} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \end{bmatrix}^{(n)}(y) dS_y, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

ここに $\Gamma_{kl}^{(n)} = \Gamma_{kl}^{(n)}(x; y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) \cos n\theta d\theta$, $\tilde{\Gamma}_{kl}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{kl}^{(n)}(x; y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) \sin n\theta d\theta$

$\Gamma'_{kl}^{(n)} = \Gamma'_{kl}^{(n)}(x; y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) \sin n\theta d\theta$, $\tilde{\Gamma}'_{kl}^{(n)} = \tilde{\Gamma}'_{kl}^{(n)}(x; y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{G}_{kl}^{(n)}(\bar{x}; y) \sin n\theta d\theta$

$$\Gamma_{12}^{(n)} = \Gamma_{21}^{(n)} = \Gamma_{23}^{(n)} = \Gamma_{32}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{12}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{21}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{23}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{32}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{11}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{13}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{22}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{31}^{(n)} = \tilde{\Gamma}_{33}^{(n)} = \Gamma_{11}^{(n)} = \Gamma_{13}^{(n)} = \Gamma_{22}^{(n)} = \Gamma_{31}^{(n)} = \Gamma_{33}^{(n)} = 0$$

(4), (5)式をまとめて表示すれば、 $n \geq 1$ の変位のFourier係数について次の積分関係式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}^{(n)}(x) = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Gamma}_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Gamma}_{32} \\ 0 & 0 & \Gamma_{22} & \tilde{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma'_{12} & \tilde{\Gamma}'_{11} & \tilde{\Gamma}'_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma'_{32} & \tilde{\Gamma}'_{31} & \tilde{\Gamma}'_{33} & 0 \\ \Gamma'_{21} & \Gamma'_{23} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Gamma}'_{22} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_3 \\ p_2 \end{bmatrix}^{(n)}(y) ds_y \quad (6)$$

境界応力の成分についても (3)~(6)式と同様の式を導くことができる。従って、境界条件を軸対称構造物の周方向のFourier展開で与えれば、問題をそのFourier係数関数についての積分方程式に帰着することができる。

(6)式において変位境界条件が与えられた場合、一般に未知関数 p は6個であるが、境界条件が周方向について偶関数又は奇関数のとき未知関数は3個になる。これは応力境界条件の与えられる場合にも同様である。

核 $\Gamma_{KL}^{(n)}, \tilde{\Gamma}_{KL}^{(n)}, \Gamma'_{KL}, \tilde{\Gamma}'_{KL}$ の導出

核 $\Gamma_{KL}^{(n)}, \dots$ は一般に $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-z-\eta)^{-1} \cos n(\theta-\varphi) d\theta d\varphi$ またはその互方向の偏導関数で表現できる。よく知られた公式、

$$\frac{1}{1-z-\eta} = \int_0^\infty \exp(-1-z-3|s|) J_0(s\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}) ds$$

$$J_0(s\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}) = J_0(sr) J_0(s\rho) + 2 \sum_{m=1}^\infty J_m(sr) J_m(s\rho) \cos m(\theta-\varphi)$$

これを用いて、積分は、

$$I = 4\pi^2 \int_0^\infty \exp(-1-z-3|s|) J_n(sr) J_n(s\rho) ds$$

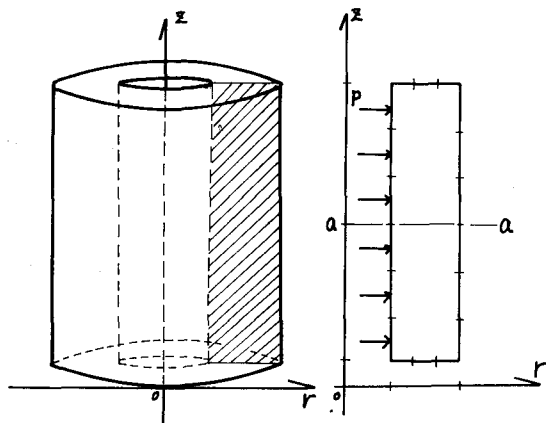
となる。この積分はポテンシャルの分野ではよく知られており、一般に完全楕円積分を以て表すことができる。

解析例

均一な内圧 P を受ける有限な厚肉円筒

解析モデル

~ element 18 ~



$a-a$ の応力分布

