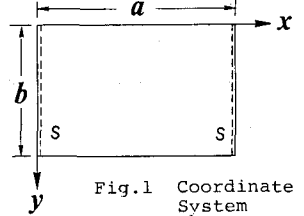


1 まえがき 筆者¹⁾は先に弾性基礎上のインドリン板の一般解を固有関数から成る二重級数で与え、板厚/スパン比の変化に伴う、たわみ、曲げモーメントの特性について言及した。本文は、まず同種の問題の解式をLevy型の単級数によって求める方法を示す。次いで、境界近傍でのねじりモーメント、せん断力の分布形状を各種境界条件に対す求めることにより、薄板理論の結果との相違について述べるものである。

2 基礎方程式 Fig.1に示す座標系に対する変位成分による基礎式、断面力は

$$\left. \begin{aligned} (D/2) [(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \phi_{,x}] + \kappa G h (w_{,x} - \psi_x) &= 0 \\ (D/2) [(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \phi_{,y}] + \kappa G h (w_{,y} - \psi_y) &= 0 \\ \kappa G h (\nabla^2 w - \phi) + q - \kappa w &= 0 \end{aligned} \right] \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D(\psi_{x,x} + \nu \psi_{y,y}); \quad M_y = -D(\psi_{y,y} + \nu \psi_{x,x}); \quad M_{xy} = -\frac{1-\nu}{2} D(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ Q_x &= \kappa G h (w_{,x} - \psi_x); \quad Q_y = \kappa G h (w_{,y} - \psi_y) \end{aligned} \right] \quad (2)$$



ここで、 w = たわみ; ψ_x, ψ_y = 回転角; D = 曲げ剛性; G, ν = せん断剛性, ポアソン比; h = 板厚; κ = せん断修正係数 (=5/6); q = 荷重; κ = 基礎係数; M_x, M_y, M_{xy} = 曲げ, ねじりモーメント; Q_x, Q_y = せん断力; $\phi = \psi_{x,x} + \psi_{y,y}$; ∇^2 = Laplacian; $(\cdot)_{,x} = \partial(\cdot)/\partial x$, $(\cdot)_{,y} = \partial(\cdot)/\partial y$.

w, ψ_x, ψ_y が連成した (1) 式は, Marguerre²⁾ の手法により, 次の非連成の式となる。

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{D}{\kappa G h} \nabla^2 (q - \kappa w) = q - \kappa w; \quad \phi = \nabla^2 w + \frac{q - \kappa w}{\kappa G h}; \quad \nabla^2 \theta - \frac{2}{1-\nu} \frac{\kappa G h}{D} \theta = 0 \quad (3)$$

ただし, $\theta = \psi_{x,x} - \psi_{y,y}$. ψ_x, ψ_y は w, ϕ, θ と次の関係で結ばれている。

$$\psi_x = w_{,x} + (D/\kappa G h) [\phi_{,x} - (1-\nu) \theta_{,y}/2]; \quad \psi_y = w_{,y} + (D/\kappa G h) [\phi_{,y} + (1-\nu) \theta_{,x}/2] \quad (4)$$

次に境界条件は, 境界辺上の法・接線方向を n, t とすれば,

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ 単純支持 [S] : } w = \psi_t = M_n = 0 & \quad (2) \text{ 単純支持 [S'] : } w = M_n = M_{nt} = 0 \\ (3) \text{ 固定 [C] : } w = \psi_n = \psi_t = 0 & \quad (4) \text{ 自由 [F] : } M_n = M_{nt} = Q_n = 0 \end{aligned} \right] \quad (5)$$

3 解式 Fig.1 に示すように, $x=0, a$ で単純支持 [S] され, 他は任意の境界とする。

(a) 同次解 仮定した境界条件を満足する解は,

$$w_h = \sum W_m(y) \sin \mu_m x; \quad \phi_h = \sum \Phi_m(y) \sin \mu_m x; \quad \theta = \sum \Theta_m(y) \cos \mu_m x; \quad \mu_m = m\pi/a \quad (6)$$

(6-1) 式を (3-1) 式に代入して得られる $W_m(y)$ に関する微分方程式の解は, パラメータ $S = (\kappa D)^{1/2} / 2\kappa G h$ に対し

$$\left. \begin{aligned} S < 1: \quad W_m(y) &= A_1 \cosh \alpha y \cos \beta y + A_2 \sinh \alpha y \cos \beta y + A_3 \cosh \alpha y \sin \beta y + A_4 \sinh \alpha y \sin \beta y \\ S = 1: \quad W_m(y) &= B_1 \cosh \gamma y + B_2 \sinh \gamma y + B_3 \gamma y \cosh \gamma y + B_4 \gamma y \sinh \gamma y \\ S > 1: \quad W_m(y) &= C_1 \cosh \delta y + C_2 \sinh \delta y + C_3 \cosh \epsilon y + C_4 \sinh \epsilon y \\ (\alpha, \beta) &= \{ [1 + 2S(\mu_m L)^2 + (\mu_m L)^4]^{1/2} \pm [S + (\mu_m L)^2]^{1/2} / \sqrt{2} L \}; \quad \gamma = [1 + (\mu_m L)^2]^{1/2} / L; \\ (\delta, \epsilon) &= [S + (\mu_m L)^2 \pm (S^2 - 1)^{1/2}]^{1/2} / L; \quad L = (D/\kappa)^{1/2}; \quad A_1, B_1, C_1 = \text{積分定数} \end{aligned} \right] \quad (7)$$

従って, $W_m(y)$ は, (6-1)(7) 式を (3-2) 式に代入することにより, $S \leq 1$ に対し容易に求められる。

次に, (6-3) 式を (3-3) 式に代入して $\Theta_m(y)$ を求めれば,

$$\Theta_m(y) = D_1 \cosh \eta y + D_2 \sinh \eta y; \quad \eta = \{ \mu_m^2 + [2\kappa G h / (1-\nu) D] \}^{1/2}; \quad D_1 = \text{積分定数} \quad (8)$$

(b) 特解 今, 荷重が x のみの関数で表わされるものとすれば, 荷重と特解は次式で与えられる。

$$q(x) = \sum q_m \sin \mu_m x; \quad q_m = \int_0^a q(x) \sin \mu_m x dx; \quad w_p = \sum w_m \sin \mu_m x; \quad \phi_p = \sum \phi_m \sin \mu_m x \quad (9)$$

(9) 式を (3-1), (3-2) 式に代入すれば, 係数 w_m, ϕ_m を決定出来る。さらに, (7)(8) 式の積分定数は,

$y=0$, b における境界条件より決定される。

4 数値計算例 $a/b, \nu=1/6, a/L=3, \kappa=5/6$ とし, 全面等分布载荷の場合の結果を Figs. 2-10 に示す。

5 参考文献 (1) 小林, 園田: 土木学会論文報告集, No. 341 (2) Marguerre 他: 弾性平板 (培風館)

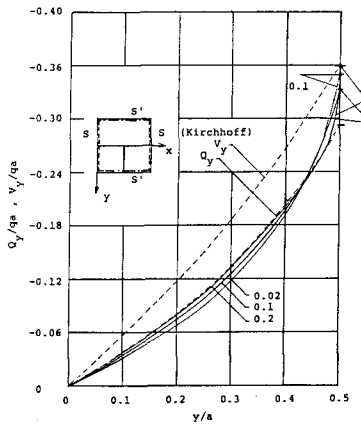


Fig. 2 Variations of Q_y and V_y along $x=a/2$

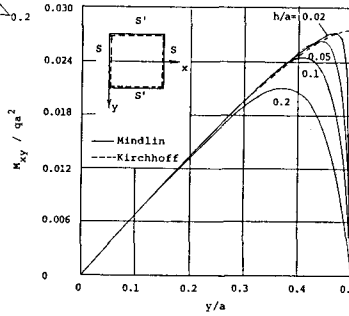


Fig. 3 Variations of M_{xy} along $x=0$

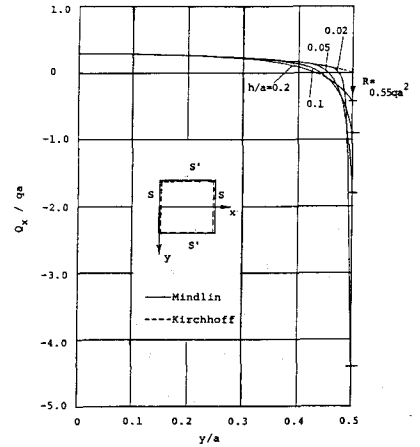


Fig. 4 Variations of Q_x along $x=0$

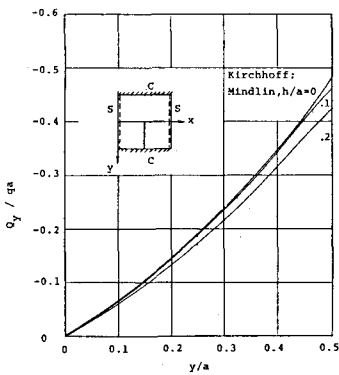


Fig. 5 Variations of Q_y along $x=a/2$

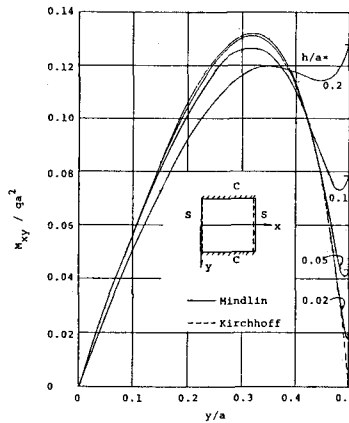


Fig. 6 Variations of M_{xy} along $x=0$

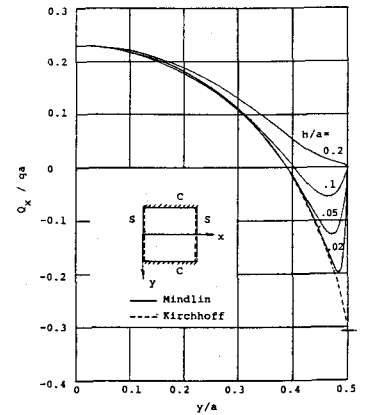


Fig. 7 Variations of Q_x along $x=0$

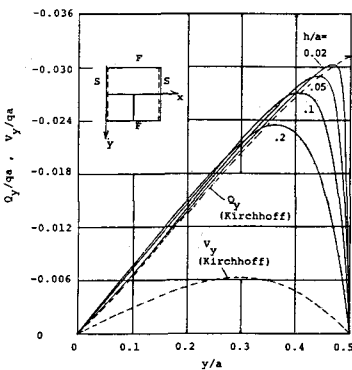


Fig. 8 Variations of Q_y and V_y along $x=a/2$

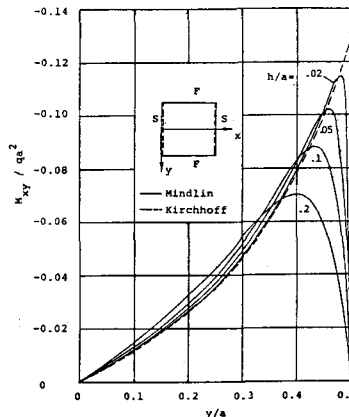


Fig. 9 Variations of M_{xy} along $x=0$

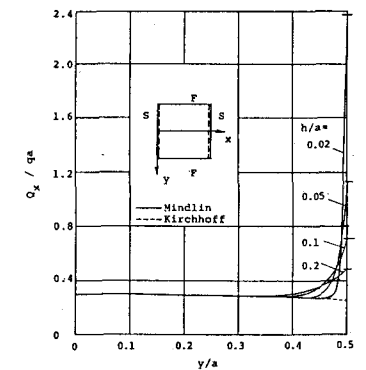


Fig. 10 Variations of Q_x along $x=0$