

山梨大学工学部 正員 平島健一
福島工業高等専門学校 正員 ○根岸嘉和

① 緒 言 3次元変位成分 u_j を板厚方向座標 x_3 に関して展開し平板理論を構成する変位仮定型の高次平板理論の定式化と、それらの理論の静的・動的特性に関する検討が著者らによってなされているが、ここでは、一定厚さの等質ないし層状性平板について変位場を厚さ方向座標 x_3 に関する Legendre 多項式で展開した高次平板理論の構築を試みる。この級数展開によると対象とする平板の材料密度が板厚方向に関して一定であれば動的な項において相異なる変位係数同志に連成が生じず、また剛性係数にその性質があれば各々の空間座標に関する項も比較的簡潔な項からなる理論式が得られるという利点がある。ここではその利点が有効に生かされる動的な問題を取り上げ、その数値計算法を概説するとともに幾つかの数値例を提示する。なお Legendre 多項式の有限項を採用して定式化したものとしては Mindlin & Medick⁽⁴⁾, Medick & Pao⁽⁵⁾, Moon⁽⁶⁾等の理論が列挙できるが、ここに示す定式化によりそれらの各理論式と統一的に誘導することができよう。

② 理論式の誘導

Fig. 1 に示す平板における変位 u_j ($j=1, 2, 3$) を座標 x_3 に関して Legendre 多項式 $P_n(\xi)$ で展開する

$$u_j(x_1, x_2, x_3; t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) \cdot u_j^{(n)}(x_1, x_2; t) \quad (1)$$

ここに $\xi = x_3/b$ であり、 $u_j^{(n)}$ は一般に変位係数と呼ばれる。

この変位を線形弾性論の基礎式に代入し、一般化変分原理に基づく定式化を行い式を整理すると、応力の n 次モーメント $\tau_{ij}^{(n)}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) に関する2次元化平板理論の運動方程式と境界条件式とが汎式のように得られる。

$$\tau_{aj, \alpha} - \frac{1}{b} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \{2(n-m)+1\} \tau_{3j}^{(n-m)} + \frac{1}{b} (F_j^{(n)} + f_j^{(n)}) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m, n)} u_j^{(m)} \quad (2)$$

$$\bar{f}_j^{(n)} = b n \alpha \tau_{aj}^{(n)} \quad \text{on} \quad C \quad \text{or} \quad \bar{u}_j^{(n)} = u_j^{(n)} \quad \text{on} \quad C \quad (3)$$

$$\text{ここに} \quad F_j^{(n)} = [\tau_{3j} \cdot P_n(\xi)]_{\xi=-1}^{\xi=1}, \quad f_j^{(n)} = b \int_{-1}^1 f_j P_n(\xi) d\xi, \quad \bar{f}_j^{(n)} = b \int_{-1}^1 (n \alpha \tau_{aj})_c P_n(\xi) d\xi \quad (4)$$

なお f_j は物体カベクトル、 ρ は材料密度を表わし $\rho^{(m, n)}$ は後の(6)式で定義する。またこれらの式においてラテン添字は 1, 2, 3 をギリシャ添字は 1, 2 をとるものとし以下の式でも同様に用いる。

ここで、一般化 Hooke の法則によって一般化的な異方性体の構成関係式(剛性係数; C_{ijkl})を与えれば $\tau_{ij}^{(n)}$ は汎式のように変位係数で表わされる。

$$\tau_{ij}^{(n)} = \int_{-1}^1 \tau_{ij} P_n(\xi) d\xi = \sum_{m=0}^{\infty} \{C_{ij\alpha\beta}^{(m, n)} u_{\alpha, \beta}^{(m)} + \frac{2m+1}{b} C_{ij3\beta}^{(m, n)} \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} u_{\beta}^{(m+k)}\} \quad (5)$$

$$[C_{ij\alpha\beta}^{(m, n)}, \rho^{(m, n)}] = \int_{-1}^1 [C_{ij\alpha\beta}, \rho] P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi \quad (6)$$

上式を用いて、(2)の運動方程式を変位で表現することにより、一般的な平板の変位の支配方程式が得られる

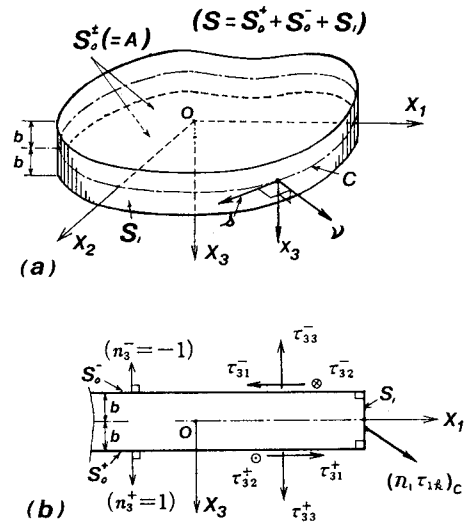


Fig. 1 Geometry of plate and surface tractions.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[C_{\alpha j \beta l}^{(m, n)} \cdot U_{\alpha, \beta}^{(m)} + \frac{2m+1}{b} C_{\alpha j \beta l}^{(m, n)} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} U_{\alpha, \beta}^{(m+k)} - \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2(n-p)+1}{b} \{ C_{\alpha j \beta l}^{(m, n-p)} \cdot U_{\alpha, \beta}^{(m)} + \frac{2m+1}{b} C_{\alpha j \beta l}^{(m, n-p)} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} U_{\alpha, \beta}^{(m+k)} \} \right] + \frac{1}{b} (F_j + f_j^{(n)}) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m, n)} \ddot{U}_j^{(m)} \dots (7)$$

なお(6)式における C_{ijkl} および ρ が板厚方向に一定である場合(たとえば等質単板の場合)には, Legendre 多項式の直交性が利用できるため(6)式は次のように簡単になり

$$[C_{ijkl}^{(m, n)}, \rho^{(m, n)}] = \delta_{m, n} \frac{1}{2n+1} [C_{ijkl}, \rho] \dots (6)'$$

上式を用いることによって, この場合の支配方程式は先に述べたように著しく簡単なものとなる。

③ 衝撃荷重による応答の計算手法

前述の支配式を用い動的応答解析を行う手法を, ρ が一定である四辺単純支持の矩形板(荷重および変位係数の解を2重三角級数で展開可能)にステップ関数 $H(t)$ 型の動荷重が作用する場合について述べる。

① 支配式を n の低次の有限項で打ち切り具体的に展開する。② 有限項で打ち切った支配式に零初期条件のもとで Laplace 変換を施す(各変位係数の慣性項に互いに連成はなく, 係数行列 d の対角項のみに Laplace 変換の助変数 s が含まれる)。③ Laplace 変換された代数方程式を解いた式を求める($s|d|=0$ と満足する根: $s=0$ と $s=\pm i s_k$ を求めておく)。④ 有理多項式の留数計算により, この式の Laplace 逆変換を行って変位係数の解を得る。⑤ これらの変位成分から応力成分その他の応答値を決定する。以上の手順を経て得られた解は, 具体的には静的荷重に対する解($s=0$ における留数)と, 固有振動モードの重ね合わせによる動的解($s=\pm i s_k$ における留数)の和となっている。

④ 数値例

Fig. 2~4 は等方性の四辺単純支持正方形板($l \times l \times 2b$)の上面に正弦波分布の衝撃荷重 $P(x_1, x_2, t) = P_0 \cdot H(t) \sin \frac{\pi x_1}{l} \sin \frac{\pi x_2}{l}$ が作用した場合の曲げ応力度の時間変化を, 各次数の理論で計算し板厚比 $2b/l = 0.1, 0.2, 0.5$ について示したものである。

なお図中の 1st は変位係数として $U_{\alpha}^{(0)}, U_{\alpha}^{(1)}, U_{\alpha}^{(2)}$ を採用したもので, 2nd とは $U_{\alpha}^{(0)} \sim U_{\alpha}^{(3)}, U_{\alpha}^{(0)} \sim U_{\alpha}^{(2)}$ を, 3rd とは $U_{\alpha}^{(0)} \sim U_{\alpha}^{(5)}, U_{\alpha}^{(0)} \sim U_{\alpha}^{(4)}$ をそれぞれ採用したものである。また図中には 1st として 1st の $U_{\alpha}^{(0)}, U_{\alpha}^{(1)}, U_{\alpha}^{(2)}$ に加え $U_{\alpha}^{(3)}$ を採用し最低次の面内伸縮挙動を考慮した場合も比較の為に記入した。

これらより, 板厚比の増大に伴ない応答波形が複雑化し, 各次数の理論間の差異も明確になっ(行く)様子が確認できる。

[参考文献] 1)-3) 平島, 根岸: 工本学会論文報告集, No.330, pp.1-14, 1983; No.333, pp.21-34, 1983; No.341, pp.163-172, 1984. 4) Mindlin, R.D. & Medick, M.A.: J. Appl. Mech., Vol.26, pp.561-569, 1959. 5) Medick, M.A. & Pao, Y.H.: J. Acoust. Soc. Am., Vol.137, pp.59-65, 1965. 6) Moon, F.C.: J. Comp. Mat., Vol.6, pp.62-79, 1972.

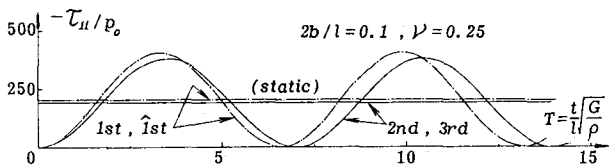


Fig. 2 Time response of bending stress T_{II} at upper surface of central point of the plate for various order theories under the dynamic load with time step function ($2b/l=0.1, \nu=0.25$).

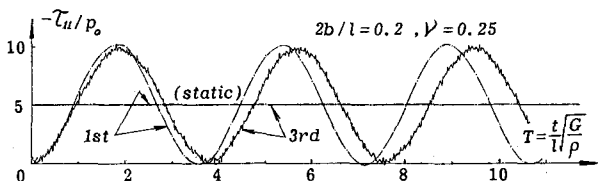


Fig. 3 Same as Fig. 2 for the case of $2b/l=0.2$.

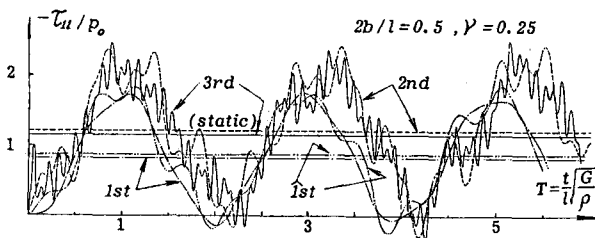


Fig. 4 Same as Fig. 2 for the case of $2b/l=0.5$.