I-5

円柱座標における横等方性体の一つの解について

北見工業大学　正員　奥村　勇

<u>1．まえがき</u>　3次元弾性問題の歴史は深く，特に，等質・等方弾性体については，J. Boussinesq タイプ及び B. Galerkin タイプの解を始めとし，現在では，その基本的な部分については，ほぼ完成されている様に見えるが，種々の座標系における3次元弾性問題の実際的な解析には，まだ検討すべき余地が残されている。

一方，異方性体に関しては，その歴史の深さにもかかわらず，まだ未知の部分が多く，座標系によっては，有限な3次元弾性体の解析を可能にする基本的な解すら未だ見出されていないのが現状である。異方性体の中では実際的な面から考えても，直交異方性体と横等方性体とが特に重要と考えられるが，これらの弾性体に関する解は，直角座標において2，3見出されているだけで，円柱座標における基本的且つ一般的な解は，未だ見出されていない様に思われる。3次元弾性問題における解は，単なる数学的解と異なり，弾性論的な独立性，簡易性及び適用性が要求され，解の発見に困難性を伴うことが多い。

円柱座標における横等方性体の解として，grad. 及び rot. タイプの H. Elliott 及び A. Lodge の解が良く知られており，特殊な3次元弾性問題に応用されているが，有限な弾性体，例えば，有限円柱或いは有限円筒の非軸対称問題の応力解析には，この2つのタイプの解だけでは不十分である。このことは，円柱座標における等質・等方性体の基本的な解と比較しても判る。円柱座標における横等方性体には2つの場合が考えられる。どちらの場合も独立な弾性定数の箇数が5つではあるが，1つは，横等方性の通常の意味における高さ方向に沿った異方性（面内等方性）と他の1つは，半径方向に沿った異方性（面内極異方性）とがある。この2つの異方性は，独立な弾性定数の箇数が一致している点では共通しているが，弾性論的には全く性質の異なる異方性であり，解の導出は，前者より後者がはるかに困難である。1つの試みではあるが，今回，この両者の横等方性体に関する Boussinesq タイプの解が得られたので報告する。

<u>2．z 方向に沿った異方性（面内等方性）の場合</u>　座標系は円柱座標 (r, θ, z) を取り，ひずみ成分及び応力成分を通常の記号に従って表わすと，一般化された Hooke の法則は次式となる。

$$\sigma_{rr} = c_{11} e_{rr} + c_{12} e_{\theta\theta} + c_{13} e_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{12} e_{rr} + c_{11} e_{\theta\theta} + c_{13} e_{zz}, \quad \sigma_{zz} = c_{13} e_{rr} + c_{13} e_{\theta\theta} + c_{33} e_{zz} \quad \cdots\cdots (1a)$$

$$\sigma_{\theta z} = c_{44} e_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = c_{44} e_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66} e_{r\theta}, \quad c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2 \quad \cdots\cdots (1b)$$

ここで，$c_{11}, \cdots, c_{66}$ は，それぞれ弾性定数である。上式を変位成分で表わし，つり合い式に代入すると，変位成分 u_r, u_θ 及び u_z で表わされたつり合い式が次の様に得られる。

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + c_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - c_{11}\frac{u_r}{r^2} + (c_{12}+c_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + c_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} +$$
$$- (c_{11}+c_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0 \quad \cdots\cdots (2a)$$

$$c_{66}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + c_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - c_{66}\frac{u_\theta}{r^2} + (c_{12}+c_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} +$$
$$+ (c_{11}+c_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + (c_{13}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} = 0 \quad \cdots\cdots (2b)$$

$$c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + c_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + c_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{44})\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + (c_{13}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} = 0 \quad \cdots\cdots (2c)$$

式（2a）から式（2c）のつり合い式を満足する解として，次の様な Boussinesq タイプの解がある。

$$u = \mathrm{grad}\left[\phi_0 + r\,\mathrm{grad}\,\phi_1 - \frac{2\sqrt{c_{11}c_{33}}}{c_{13}+c_{44}}\phi_1 + r\bar{\phi}\right] - \frac{2\sqrt{c_{11}c_{33}}}{c_{13}+c_{44}}\bar{\phi} + \mathrm{rot}\,\psi \quad \cdots\cdots (3a)$$

ここで，$\boldsymbol{u}=[u_r,\ u_\theta,\ u_z]$，$\boldsymbol{r}=[r,\ 0,\ z]$，$\bar{\phi}=[0,\ 0,\ -\partial\phi_1/\partial z+\phi_2]$，$\boldsymbol{\psi}=[0,\ 0,\ \psi_z]$ ・・・・・（3b）

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\theta^2}+\frac{\sqrt{c_{11}c_{33}}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2\phi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\theta^2}+\frac{\sqrt{c_{11}c_{33}}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}=0 \cdots\cdots (3c)$$

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\theta^2}+\frac{\sqrt{c_{11}c_{33}}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2}=0 \cdots\cdots (3d)$$

但し，

$$c_{13}+2c_{44}-\sqrt{c_{11}c_{33}}=0 \cdots\cdots (3e)$$

式（3a）から式（3e）の解は，等方性体とすると，$c_{33}=c_{11}$，$c_{13}=c_{12}$，$c_{66}=c_{44}$，$4c_{11}/(c_{11}+c_{12})=4(1-\nu)$（$\nu$：ポアソン比）となるので，前回発表した等方性体に関する解に正確に一致する。しかしながら，この解には，式（3e）に見られる様に，弾性定数の間に1つの拘束条件が必要になるという難点がある。

__3. r 方向に沿った異方性（面内極異方性）の場合__　この場合の異方性は，通常の意味における横等方性ではないが，一往，横等方性として取り扱うと，一般化されたHookeの法則は，次のとおりである。

$$\sigma_{rr}=c_{11}e_{rr}+c_{12}e_{\theta\theta}+c_{12}e_{zz},\quad \sigma_{\theta\theta}=c_{12}e_{rr}+c_{22}e_{\theta\theta}+c_{23}e_{zz},\quad \sigma_{zz}=c_{12}e_{rr}+c_{23}e_{\theta\theta}+c_{22}e_{zz} \cdots\cdots (4a)$$

$$\sigma_{\theta z}=c_{44}e_{\theta z},\quad \sigma_{rz}=c_{55}e_{rz},\quad \sigma_{r\theta}=c_{55}e_{r\theta},\quad c_{44}=(c_{22}-c_{23})/2 \cdots\cdots (4b)$$

また，変位成分 u_r, u_θ 及び u_z で表わされたつり合い式は，次式となる。

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+c_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{55}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}+c_{55}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-c_{22}\frac{u_r}{r^2}+(c_{12}+c_{55})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}+$$
$$-(c_{22}+c_{55})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+(c_{12}+c_{55})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}+(c_{12}-c_{23})\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \cdots\cdots (5a)$$

$$c_{55}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+c_{55}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-c_{55}\frac{u_\theta}{r^2}+(c_{12}+c_{55})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}+$$
$$+(c_{22}+c_{55})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+(c_{23}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z}=0 \cdots\cdots (5b)$$

$$c_{55}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+c_{55}\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+c_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}+c_{22}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(c_{12}+c_{55})\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+(c_{23}+c_{55})\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+$$
$$+(c_{23}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial z}=0 \cdots\cdots (5c)$$

この極異方性の場合は，$c_{11}\neq c_{22}$，$c_{12}\neq c_{23}$ が特徴であり，J. Boussinesqタイプの解が存在するか否かも明確ではないが，1つの試みとして，次の解が存在する。

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,(\phi_0+\eta)+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi} \cdots\cdots (6a)$$

ここで，

$$\boldsymbol{u}=[u_r,\ u_\theta,\ u_z],\quad \boldsymbol{\psi}=[0,\ 0,\ \psi_z] \cdots\cdots (6b)$$

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial r^2}+\left(1-\frac{c_{12}-c_{23}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_0}{\partial r}+\frac{c_{22}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\theta^2}+\frac{c_{22}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}=0 \cdots\cdots (6c)$$

$$\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2}\equiv\nabla^2\psi_z=0 \cdots\cdots (6d)$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2}+\left(1-\frac{c_{12}-c_{23}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{c_{22}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2}+\frac{c_{22}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=-\frac{c_{12}-c_{23}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta}\right) \cdots\cdots (6e)$$

但し，

$$c_{22}-c_{23}-2c_{55}=0\quad (c_{44}=c_{55}),\quad c_{12}+2c_{55}-\sqrt{c_{11}c_{22}}=0 \cdots\cdots (6f)$$

この極異方性の場合には，等方性体の解としては基本的な解である所のgrad.タイプ及びrot.タイプの解すら厳密な意味では存在せず，式（6f）に見られる様な2つの拘束条件を課して，始めて解が存在する様である。

__4. あとがき__　円柱座標における通常の意味での横等方性（面内等方性）体の解としては，式（3a）から式（3e）に示した解が等方性体の解と正確に対応した一つの基本的な解と考えられる。grad. 及び rot. タイプの解のみであれば，Elliott 及び Lodgeの解に見られる様に弾性定数の間に何らの拘束条件も必要にならないが，ここで求めた $r\partial\phi_1/\partial r$ 及び $z\phi_2$ の解が存在するためには，どうしても式（3e）の条件が必要となる。r 方向に沿った異方性（極異方性）体の解の場合には，grad. 及び rot.タイプの解ですら，式（6f）の様な条件が必要となり，このタイプの解が存在しないと言っても過言ではないと思われるが，残された今後の課題である。