I-3　熱伝導方程式の有限要素解析における数値安定性に関する基礎的研究

岡山大学工学部　正　員　谷口健男
岡山大学大学院　学生員　○松本　巧
岡山大学大学院　学生員　光岡和彦

1．まえがき　電子計算機による非定常の偏微分方程式の解析手法の1つに時間軸を差分法、空間軸を重みつき残差法を用いて離散化して代数方程式に置換しそれを解くことにより近似解を得るという方法がよく用いられるが、一般には大次元の連立一次方程式を各時間ステップごとに解かなければならず陰的解法より陽的解法が好まれる。しかし、陽的解法を用いた場合の数値解の安定の為の条件式は不明であり、本研究では、熱伝導方程式においてその条件式を理論的に誘導し、その結果必要となる最大固有値の推定に関してBrauerの定理を適用しこの定理の利用の有効性に検討を加え、それより数値安定性に関する1つの規準を導く。

2．有限要素法、差分法混合の場合の定式化　空間2次元の熱伝導方程式の無次元化表現は $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial\phi}{\partial t}$ ------① で与えられる。①式を境界S_1上で $\phi=\bar{\phi}$，境界S_2上で $\frac{\partial\phi}{\partial n}=-h(\phi-v)$ （$\bar{\phi}$：定数，n：境界上での外向法線，h：熱伝達係数，v：外部温度）という境界条件のもとで上記手法を用い離散化すると $[K]\{\Phi_0\}+[M]\frac{\{\Phi\}-\{\Phi_0\}}{\Delta t}=-[B]\{\Phi_0\}+\{P\}$ （$[K]$：全体剛性行列，$[M]$：質量行列（対角），$[B]$：熱伝達境界行列，$\{P\}$：外部温度ベクトル，$\{\Phi\}$：節点量ベクトル（未知），$\{\Phi_0\}$：節点量ベクトル（既知））------② となり②式から、未知節点量ベクトル$\{\Phi\}$は、$[K^*]$を境界条件を含めた全体剛性行列、すなわち、$[K^*]=[K]+[B]$とおけば、$\{\Phi\}=\{[I]-[M]^{-1}[K^*]\Delta t\}\{\Phi_0\}+[M]^{-1}\{P\}\Delta t$ ------③ （$[I]$：単位行列）と表わされる。

3．限界時間幅の決定　③式の左辺未知節点量ベクトルの値が発散しないための必要十分条件は、右辺既知節点量ベクトルの係数行列の最大固有値の絶対値が1を越えないことであり、行列$[M]^{-1}[K^*]$の固有値をλとおけば、$|1-\lambda\Delta t|\leq 1$ であり、これを解いて $\Delta t\leq 2/\lambda$ ------④ となる。すなわち、限界時間幅は行列$[M]^{-1}[K^*]$の最大固有値に支配される。しかし、一般に固有値解析は多大な演算時間を必要とするため、ここにBrauerの定理を用いて最大固有値の推定を行い、限界時間幅を算出する。そしてBrauerの定理により推定される最大固有値をλ'とおけば、$\lambda'\geq\lambda$ となる関係があるため ④式より $\Delta t\leq 2/\lambda'$ ------⑤ としてやれば、数値解の安定は必ず保証される。ここに⑤式を本研究における数値解安定のための条件式として提案するが、λ'は最小要素または熱伝達境界における節点の剛性及び質量により推定される。

4．数値実験　⑤式によって提案された限界時間幅が、どの程度実際の限界時間幅と一致しているかを、次のような数値実験により査証した。モデルとして、三角形定ひずみ要素を用いて単位領域を図-1のように離散化したものを用いた。また、境界条件は四周辺固定または四周辺熱伝達境界とした。なお本報告の以下に出てくる理論値とはBrauerの定理を用いて推定した時間幅であり、実験値とは数値実験より得られた限界時間幅である。グラフは全て実験値を100として理論値を評価した。

実験1　x, y方向とも要素長を均一に分割した場合、理論値と実験値は要素数に関係なく一致した。境界条件は四周辺固定であり、この結果を表-1に示す。

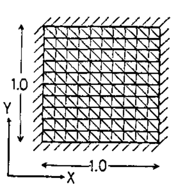

図-1 数値実験モデル

表-1　理論値(T)と実験値(E)

		0.025	0.050	0.100	0.167
0.025	E	1.561	-	-	-
	T	1.561			
0.050	E	2.500	6.249	-	-
	T	2.500	6.249		
0.100	E	2.940	10.27	25.66	-
	T	2.940	10.00	25.00	
0.167	E	3.093	11.77	37.90	71.13
	T	3.093	11.46	36.80	69.66

($\times 10^{-4}$)

実験2　有限要素法を用いるにあたって大きな利点の1つは、領域を部分的に細かく分割できることである。ここでは簡単のためx軸方向のみ部分的に辺比、要素数を変えた。図-2，図-4，図-6，図-8に示すように単位領域をx軸方向にm個のブロックに分けて、それぞれの要素の長さ $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots\cdots,\Delta x_m$，要素数 $n_1,n_2,\cdots\cdots,n_m$ を変えてみる。境界条件は四周辺固

定であり、領域の要素分割形状を図-2.図-4.図-6.図-8に、それぞれの場合の結果を図-3.図-5.図-7.図-9に示す。

実験3　領域をひし形と平行四辺形に変形させる。領域は均一に分割し、その領域形状は図-10.図-11に示すものを用い、境界条件は四周辺固定を用いた。この結果を図-12.図-13に示す。

実験4　四周辺とも導関数境界条件を用いた場合、熱伝達係数の値が時間幅にどのように影響するかを調べる。領域は均一に分割し、この結果を図-14に示す。

5. 考察

実験1、実験4から領域を均一に分割する場合、理論値は限界時間幅と一致していると考えられる。ただし、熱伝達境界を用いて熱伝達係数が大きくなると理論値は過少な評価になってくる。しかし熱伝達係数が100を越えるときには境界条件は固定とみなせるため、数値解析には、固定境界を用いた方がよい。実験3より、領域を直角三角形でない三角形で分割する場合、要素の形が正三角形に近づいたとき理論値は、実際の限界時間幅の75%程度に推定されるが、工学的に判断すれば実用上十分である。実験2より、領域を不均一に分割する場合、小さい要素と大きい要素との大きさの比が大きくなれば、理論値は実際の限界時間幅よりかなり過少な値になる。しかし有限要素法では要素の大きさの比はあまり大きくしない方がよいため、この点に関しても実用上問題はない。以上をまとめると、理論値が実際の限界時間幅と大きくずれる要因として、大きい要素と小さい要素との大きさの比及び数の比、またその配置、境界条件があげられる。一致していると考えられるものは、領域を均一に要素分割し、固定及び熱伝達係数10以下の熱伝達境界を用いた場合である。

6. あとがき

限界時間幅の正確な推定は、特に大きな領域や細かく要素分割した領域の長時間にわたる解析において、演算時間を短縮しむだを省くためにぜひとも必要である。上記考察から熱伝導方程式に関してBrauerの定理を用いて算出した安定条件は、必ず実際の限界時間幅より小さく、工学的にはほぼ一致すると考えられる。しかしかなり過少な値であることもある。したがって実際の限界時間幅を支配する要因と考えられる離散幅、境界条件の種類、要素の形状、大きさのばらつきとその配置などから限界時間幅を正確に推定できるようになることが今後の大きな課題である。

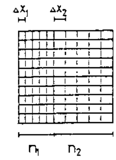

図-2 m=2

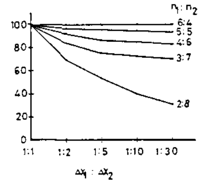

図-3 理論値の割合

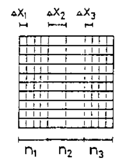

図-4 m=3

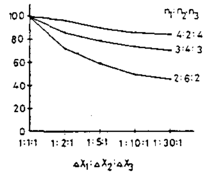

図-5 理論値の割合

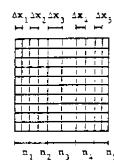

図-6 m=5

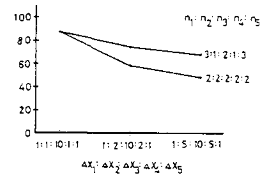

図-7 理論値の割合

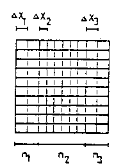

図-8 m=3

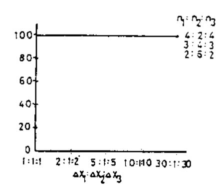

図-9 理論値の割合

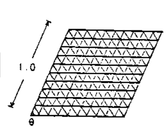

図-10 ひし形

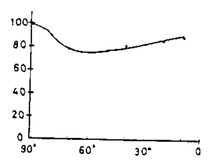

図-12 理論値の割合

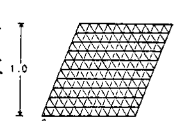

図-11 平行四辺形

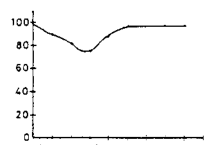

図-13 理論値の割合

参考文献

コナー/ブレビア共著（奥村敏恵監訳）"流体解析への有限要素法の応用", サイエンス社, 1979年

G・D・スミス著（藤川洋一郎訳）"電算機による偏微分方程式の解法", サイエンス社, 1978年（PP. 68～70）

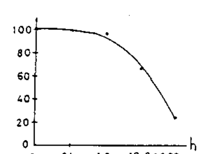

図-14 熱伝達境界