

阿南高専 滝根 文司

§: 1 観測方程式

測量の結果を平均計算し、それぞれの必要な点の座標を求めることは、基準点測量の重要な部分と捉えられている。従来行われていた、純粋な三角測量方式は、測角と距離の混在する、三角網は、条件式の考え方が、非常にむづかしい。これに反して、最小二乗法のもう一つの手段である、観測方程式の考えによると、測角、測距がどのように混在しても、概率的に処理出来る。

いま2点 i, j を結ぶ正しい距離を S_0 。この間の距離を光波測距儀などで求めた実測値を S_{ij} とすると常に

$$S_0 = S_{ij} + v \quad (v: \text{実測値への補正値})$$

距離を測る目的は、この2点間の座標を求めることで、この i, j の近似座標 $(X_i', Y_i'), (X_j', Y_j')$ より求めた i, j の距離を

$$S_{ij}' = \{(X_i' - X_j')^2 + (Y_i' - Y_j')^2\}^{1/2} \quad \text{とすると}$$

$$S_0 = S_{ij} + v = S_{ij}' + \Delta S' \quad (\Delta S': \text{近似距離 } S_{ij}' \text{ の誤差})$$

なる恒等式は常に成立する。

測角の場合も同様で、 i から j を見る方向角を T_{ij} ($\tan T_{ij} = (Y_j - Y_i) / (X_j - X_i)$) 正しい方向角 T_{ij}' は、概算値 T_{ij} とその補正 ΔT との和で $T_{ij}' = T_{ij} + \Delta T$

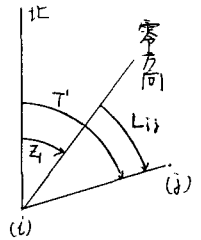
方向角を測る場合、固定した零方向からの角を測っているので、零方向と北のなす角 Z_i 点 j 方向の水平角を L_{ij} とすると、 i から j を見る正しい方向角 T_{ij}' は、観測 L_{ij} の誤差の補正を v として $T_{ij}' = Z_i + L_{ij} + v$ 一方零方向角 Z_i は、概算して求めた Z_i' とその補正 ΔZ との和 $Z_i = Z_i' + \Delta Z$ であるから $T_{ij}' = T_{ij} + \Delta T = Z_i' + L_{ij} + \Delta Z + v$ $4S, 4T$ をテーラー展開すると

距離について $v = c_{ij} X_i + c_{ji} X_j + d_{ij} Y_i + d_{ji} Y_j + l_{ij}$

角について $v = -a_{ij} X_i + a_{ji} X_j + b_{ij} Y_i + b_{ji} Y_j + l_{ij}$

$$\begin{cases} c_{ij} = -c_{ji} = (X_i - X_j) / S_{ij} & d_{ij} = d_{ji} = (Y_i - Y_j) / S_{ij} \\ a_{ij} = -a_{ji} = (Y_i' - Y_j') / S_{ij}' \cdot \rho'' & b_{ij} = -b_{ji} = (X_i' - X_j') / S_{ij}' \cdot \rho'' \end{cases}$$

上式の関係が、三角網の測角、測距で任意の2点間に成立する、これを観測方程式という。



§: 2 フリーネットワーク

観測方程式 $V = AX + L$ (A : 係数行列 X : 補正すべき未知量 L : 残差) において 最小二乗の条件を満たすために

$$A'PA X + A'PL = 0 \quad (A': A \text{ の転置行列 } P: \text{重量})$$

上式の、未知のパラメーターベクトル X にかかる、 $A'PA$ の行列 $|A'PA| \neq 0$ なら逆行列 $(A'PA)^{-1}$ が存在し その解は

$$X = -(A'PA)^{-1} A'PL \quad \text{で求まる。しかし選定の場合により、}$$

与点にも誤差があるとき、与点も未知点とする $|A'PA| = 0$ となることがある。このとき与点も未知点として補正量を求めるというのが、フリーネットワークである。

観測方程式 $AX + L = V$ から作られる、正規方程式 $A'PA X + A'PL = 0$ は必ず解がある。それは $A'PA$ が正則か否かに関係なく、行列 $A'PA$ に列ベクトル u を加えた行列のランクが $A'PA$ と等しい。

正則でない $A'PA$ について $A'PA = N \quad A'PL = u$ とすると、正規方程式は、 $NX + u = 0$ は、観測方程式の最小二乗解を与える方程式であるから、この一般解は $X = -N^{-1}u$

このような解は、一般に無数にある。

今、 N^{-1} を N の1つの一般逆行列とすると $\bar{N} = N^{-1} + K(I - N^{-1}N) + (I - N^{-1}N)J$ で定義される

N^{-} は、 $NN^{-}N=N$ を満足するから、大きさだけが適合する 任意の K, J を用いて無数に N^{-} を作る
ことができる。しかし これらの中で X のノルム $\|X\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ を最小にする解
と、 $X = N^{-}u$ とすると N^{-} の持つ 必要かつ充分条件は

$$NN^{-}N=N \quad (N^{-}N)^{-1} = N^{-}N$$

この関係は、 $N^{-}N = N(NN^{-})^{-1}$ を満足する。 N は対称行列であるから $N = N'$ より X のノルムを
最小にする解は $X = -N'(NN')^{-1}u$

N は対称行列で、 n 行 $\times$ n 列 とすると、 NN も、当然、対称で、 $(n \times n)$ の大きさである。しかし、ランク
は、 n より小さい。 NN のランク r が分かってゐるとする。 そのとき NN の行と列の順番を適当に入
れかゝる

$$NN = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

とし、部分行列 B と E は正方にして、 B のランク $= r$ にすることが出来る。 B は正則であるから B^{-} が
存在し、それ以外の要素を全部 0 とすると 一般逆行列 が得られる

$$(NN)^{-} = \begin{bmatrix} B^{-} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

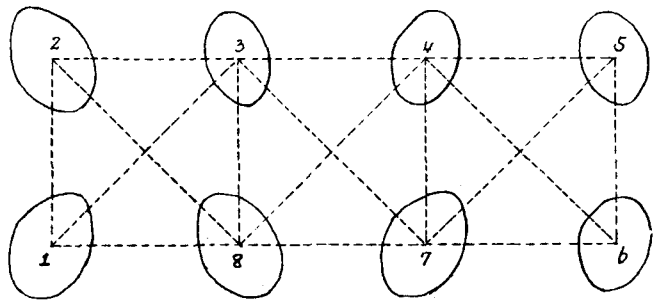
フリーネットワークで求めた誤差楕円を計算する上で必要で、分散 σ_{xx} , σ_{yy} , 共分散 σ_{xy} は、一般逆
行列の対角線要素などから求まる。

§: 3 計算例

近似座標

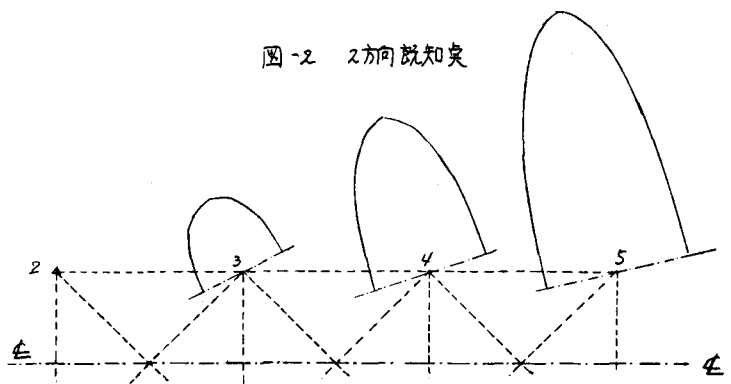
測点	X	Y
1	0	0
2	1000.	0
3	1000.	1000.
4	1000.	2000.
5	1000.	3000.
6	0	3000.
7	0	2000.
8	0	1000.

図-1 フリーネット



測点	誤差楕円		傾斜角
	長軸	短軸	
1	0.508	0.322	29°-11'
2	0.508	0.322	-(29°-11')
3	0.421 (0.702)	0.282 (0.378)	-(16°-53') -(26°-35')
4	0.421 (.40)	0.282 (0.520)	(16°-53') -(18°-28')
5	0.421 (2.33)	0.282 (0.629)	-(16°-53') -(13°-24')
6	0.421 (2.33)	0.282 (0.629)	16°-53' 13°-24'
7	0.508 (.40)	0.322 (0.519)	29°-11' 18°-32'
8	0.508 (0.702)	0.322 (0.378)	-(29°-11') (26°-38')

図-2 2方向既知点



フリーネットワークの誤差楕円は、2方向既知点のそれらに比して小さく
同時に、単列三角網の、網の強さを合理的に表わしてゐるのが分かる

() 2方向 固定