IV-138　住宅都市の2次元的モデル化に関する基礎的研究

熊本大学工学部　正 員　安藤 朝夫

1．はじめに

Alonso、Muthらにはじまる、都市とそこにおける土地利用を理論的に分析しようとする試みは、1970年代に入って、最適制御理論の普及と相まって、新都市経済学（NUE）と呼ばれる一分野を形成するに至った。

NUEで扱われる都市は、典型的には単一中心の1次元孤立都市であるが、[1] この仮定は現実を過度に単純化していることは否めない。たとえば、1次元のモデルでは、都心に至る交通網が到る所密に、かつ一様に存在すると仮定しているに等しいが、現実には街路は一定の規模をもって、離散的に配置される。このように、都市が2次元的広がりをもつ以上、1次元的モデルでは充分に分析できない問題が存在する。

ところで、1次元のNUE型モデルは、Herbert-Stevensによる線形計画問題[2]において距離を連続化して得られる最適制御問題によって、統一的に記述できることが知られている。[3] そこで本研究では、このHerbert-Stevens型最適制御問題を2次元空間に拡張することによって、住宅都市の2次元的分析のための基本フレームを提示する。

2．基本仮定

外部性の存在しない場合におけるモデルの概要は、以下の仮定によって記述される。

i）すべての世帯はCBD（半径 r_c）に通勤する。

ii）都市は中心角 $\theta_f \in (0, 2\pi]$ ラジアンの扇形の土地にあり、CBDの外側のすべての土地が利用できる。

iii）世帯は $m \geq 1$ タイプに区分され、各タイプは $\bar{Y}_i \geq 0$ の所得をもつ。

iv）世帯の効用 U は、合成財（ニュメレール）の消費量 z と宅地面積 q の関数として与えられる。

$$U = u(z, q) \tag{1}$$

タイプ i 世帯の効用水準は $\bar{U}_i$ で与えられる。

v）地点 (r, θ) からの通勤費は $\bar{D}(r, \theta) \geq 0$ で与えられる。

vi）農業地代 $\bar{R}_A \geq 0$ は地点により異ならない。

vii）タイプ i 世帯数は $\bar{N}_i > 0$ で与えられる。

以上において、外生変数の値はいずれも有限に定められるものとする。

3．最適問題 2HS（$\{\bar{U}_i\}$）

上述の仮定のもとに、2次元のHerbert-Stevens型最適制御問題の定式化を行なう。いま $n_i(r, \theta)$ を地点 (r, θ) における世帯密度［世帯数/$m \cdot rad$］とし、$N_i(r, \theta)$ を基線より θ(rad) 以内、原点より r(m) 以遠に居住する世帯数（タイプ i）とすると、この問題における状態方程式は、次の双曲型偏微分方程式（第1種標準形）で表わされる。

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial r \partial \theta} = -n_i(r, \theta) \tag{2}$$

また、dr(m)・$d\theta$(rad) に囲まれる微小面積が $r\,dr\,d\theta$ であることから、面積制約は

$$\sum_i q_i(r, \theta)\, n_i(r, \theta) \leq r \tag{3}$$

で与えられる。（下図参照）

非負条件と境界条件は、それぞれ次のようになる。

$$n_i(r, \theta) \geq 0, \quad q_i(r, \theta) \geq 0 \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_i(r_c, \theta_f) = \bar{N}_i \\ N_i(r, 0) = N_i(r_f(\theta), \theta) = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

ここに $r_f(\theta)$ は、放射線 θ 上の都市外縁までの距離である。

目的関数は都市全体での純地代収入で与えられる。

$$\int_0^{\theta_f}\int_{r_c}^{r_f(\theta)} \sum_{i=1}^{m} \left[\Psi_i(q_i(r, \theta), r, \theta, \bar{U}_i) - \bar{R}_A\right] q_i(r, \theta)\, n_i(r, \theta)\, dr\, d\theta \tag{6}$$

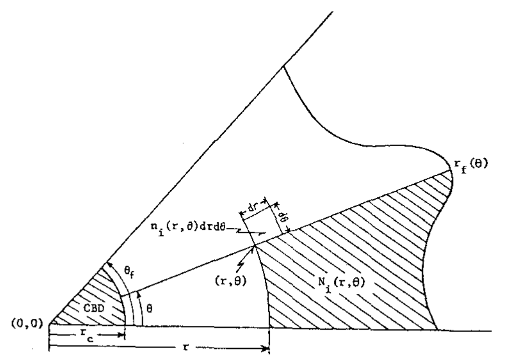

図　2次元都市の概念

ここに$\Psi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i)$は、タイプ$i$世帯が$(r,\theta)$で$q_i(r,\theta)$の土地を占用しつつ、$\overline{U}_i$なる効用を得る場合の付け値地代で、次式で与えられる。

$$\Psi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i)=\frac{\overline{Y}_i-\overline{D}(r,\theta)-z(q_i(r,\theta),\overline{U}_i)}{q_i(r,\theta)} \qquad (7)$$

ただし関数$z(q,U)$は、(1)式をzについて解いた関数(無差別曲線)である。

以上を用いて、2次元の最適問題2HS($\{\overline{U}_i\}$)は、効用水準の組$\{\overline{U}_i\}$をパラメータとして、以下のように定式化される。

2HS($\{\overline{U}_i\}$)

$$\max_{n_i(r,\theta),\, q_i(r,\theta),\, r_f(\theta)} \quad (6),$$
$$s.t. \quad (2),(3),(4),(5).$$

4. 最適条件2OC($\{\overline{U}_i\}$)

分散パラメータ型最適制御問題に関する最大値原理[4]から、上の問題に対する最適条件2OC($\{\overline{U}_i\}$)は以下のようになる。なお、ここでは個々の財の不可欠性を仮定している。

o) 世帯

$$[\overline{U}_i-U_i(r,\theta,R(r,\theta),Q_i)]\,n_i(r,\theta)=0 \qquad (8)$$

$$\overline{U}_i=\max_{(r,\theta)\in\Omega} U_i(r,\theta,R(r,\theta),Q_i) \qquad (9)$$

i) 土地市場

$$R(r,\theta)=\max\left\{\max_i \Phi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i,Q_i),\ \overline{R}_A\right\} \qquad (10)$$

$$[R(r,\theta)-\Phi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i,Q_i)]\,n_i(r,\theta)=0 \qquad (11)$$

$$\sum_i q_i(r,\theta)\,n_i(r,\theta)\leq r \qquad (3)$$

$$(R(r,\theta)-\overline{R}_A)(r-\sum_i q_i(r,\theta)n_i(r,\theta))=0 \qquad (12)$$

$$R(r_f(\theta),\theta)=\overline{R}_A \qquad (13)$$

ii) 政府： 効用水準$\{\overline{U}_i\}$を定める。

iii) 整合条件

$$N_i(r,\theta)=\int_0^{\theta}\int_r^{r_f(\theta)} n_i(r,\theta)\,dr\,d\theta \qquad (2)'$$

$$n_i(r,\theta)\geq 0 \qquad (4)'$$

$$N_i(r_c,\theta_f)=\overline{N}_i \qquad (5)'$$

以上において、Ωは制御領域：

$$\Omega=\{(r,\theta)\,|\,r\in[r_c,r_f(\theta)],\ \theta\in[0,\theta_f]\} \qquad (14)$$

であり、また関数$U_i(r,\theta,R(r,\theta),Q_i)$、$\Phi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i,Q_i)$は、それぞれ以下により定義される。

$$U_i(r,\theta,R(r,\theta),Q_i)=\max_{z,q}\{u(z,q)\,|\,z+R(r,\theta)q=\overline{Y}_i+Q_i-\overline{D}(r,\theta)\} \qquad (15)$$

$$\Phi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i,Q_i)=\Psi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i)+\frac{Q_i}{q_i(r,\theta)} \qquad (16)$$

1次元の場合と同様に、この最適条件によって規定される解を均衡解としてもつ市場問題2AM($\{\overline{Q}_i\}$)が存在するが、その市場問題との対応関係から、乗数Q_i, $R(r,\theta)$は、それぞれ所得補助金、最適地代と解釈される。したがって、$U_i(r,\theta,R(r,\theta),Q_i)$は所得補助金$Q_i$が与えられた場合の間接的効用関数、$\Phi_i(q_i(r,\theta),r,\theta,\overline{U}_i,Q_i)$は補助金後の実質付け値地代を意味する。

5. 2次元モデルの適用可能性

いま、与えられた通勤費が1次元的($\overline{D}(r,\theta)=\overline{D}(r)$)であるとすると、$R(r,\theta)$, $q_i(r,\theta)$, $r_f(\theta)$はθに独立となる。このことは本研究における定式化が、従来の1次元モデルと矛盾なくなされていることを意味するが、同時に通勤費の差異が都市の方向別に不均等な発展に大きく寄与していることを示している。

2次元都市における交通施設として離散的な高速道路と細街路の2モードを考え、その空間的なmodal splitを模型的に論じたものにAnas-Moses[5]があるが、本研究のモデルは、この種の問題の一般均衡論的分析に適している。さらに交通混雑の要因と交通施設の容量を考えれば、どの程度の容量の交通施設をどのような間隔で配置するのが社会的に見て最適か、などの問題に解答を与えることができる。ただし、この種の問題の解析的な分析は困難であるので、多くを数値解析的アプローチによらねばならない。

本研究のモデルでは、双曲型の偏微分方程式で表現される種類の外部性はすべて統一的に分析することができる。しかし、双曲型、楕円型、放物型といった単純な方程式で表現できない種類の外部性が存在することも事実であり、こうした問題の処理は今後の課題である。

＊参考文献＊

1) Richardson, H.W., 1977, The New Urban Economics: and Alternatives, Pion Ltd., Chap. 1.
2) Herbert, J.D. and B.H. Stevens, 1960, A model for the distribution of residential activity in urban areas, JRS 2.
3) 安藤朝夫, 1982, 住宅立地の静学分析: NUEモデルへの統一的アプローチ, 日本地域学会第19回国内大会 発表レジュメ(mimeo).
4) Butkovskiy, A.G., 1969, Distributed Control Systems, American Elsevier. (原著ロシア語, Hayka, 1965).
5) Anas, A. and L.N. Moses, 1979, Mode choice, transport structure and urban land use, JUE 6.