IV-107　　Homotopy 法による非線形連立方程式の処理特性

筑波大学電子・情報工学系　正員　池辺八洲彦
筑波大学電子・情報工学系　正員　○星　仰

1. はじめに.

本研究の目的は非線形連立方程式の，あまりよく知られていない一つの解法である Homotopy 法の導入を図ることにある。この目的のために本稿では Homotopy 法の概要を簡単な例題によって説明する。また，非線形連立方程式の解法として最もよく活用され，紹介されている Newton法とここで述べる Homotopy法を初期値選択の範囲について比較検討し，Homotopy 法の一つの特性を事例により明示する。

2. Homotopy 法の概要.

Homotopy法とは近似解から出発して，Homotopy と呼ばれるパス(道)をたどりつつ，求めたい方程式の解に至る方法をいう。いま，解きたい方程式を式(1)とし，その近似解を式(2)とする。

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$x_i = a_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ここで，一つの Homotopy として，式(3)を考えることができる。

$$H_i(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ \ldots x_n) = (1-\lambda)(x_i - a_i) + \lambda \cdot f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n) \quad (3)$$

このとき式(3)の解　$(\lambda,\ x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \ldots,x_n(\lambda))$，

$$H_i(\lambda,\ x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \ldots,x_n(\lambda)) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ ,n) \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

は，$\lambda = 0$ のとき近似解(2)と一致し，$\lambda = 1$ のとき，式(1)の解となる。この状態を図示したものが図-1である。

3. 簡単な例

ここでは，Newton 法と Homotopy 法と初期値選択の範囲が異なることを簡単な式(5)を事例として取り上げ，後者の方が初期値選択に有利であることを説明しよう。

$$f(x) = \frac{1}{x} - b \quad (b > 0) \quad \cdots\cdots(5)$$

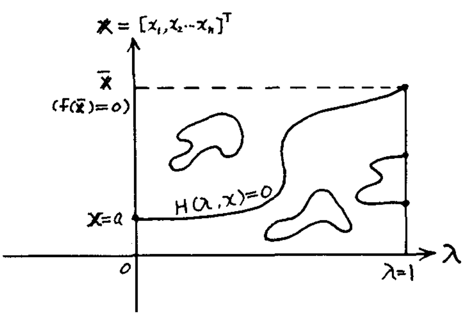


図-1　Homotopy $H(\lambda,x)=0$ の解曲線

Homotopy として

$$H(\lambda,x) = (1-\lambda)(x-a) + \lambda \cdot f(x),$$

または，

$$H(\lambda,x) = (1-\lambda)(f(x) - f(a)) + \lambda \cdot f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

を考えてみる。この事例では後者の Homotopy を用いることにすれば，式(6)に式(5)を代入して，

$$H(\lambda,x) = f(x) - (1-\lambda)f(a) = \frac{1}{x} - b - (1-\lambda)\left(\frac{1}{a} - b\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

式(7)を得る。この式(7)の $H(\lambda,x) = 0$ の解は，常微分方程式(8)を解いて，式(9)の $x(\lambda)$ となる。

$$\frac{dH(\lambda,x)}{d\lambda} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{d\lambda} + \left(\frac{1}{a} - b\right) = 0,\quad x(0) = a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$x(\lambda) = \frac{1}{\lambda b + (1-\lambda)\frac{1}{a}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで，Homotopy $H(\lambda,x(\lambda)) = 0$ の解のパスをたどるためには，λは $0 \leqq \lambda \leqq 1$

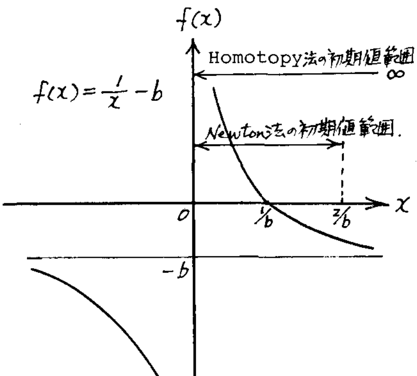
のすべてのλに対して，初期値 $\lambda = 0$, $x = a$ から始まって，求める解である，$\lambda = 1$， $x = \frac{1}{b}$ まで $x(\lambda)$ の分母が零とならないことが，必要十分条件である。この必要十分条件は $a > 0$ によって与えられる。一方，上述の事例式 $f(x) = \frac{1}{x} - b$ $(b > 0)$ に対する Newton法は次式で与えられる。

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

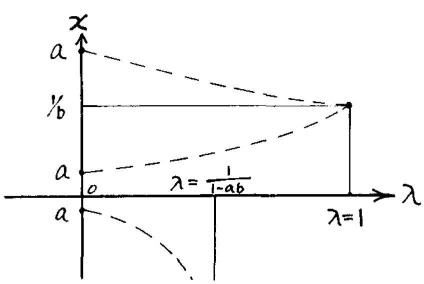
$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 \left(\frac{1}{x_n} - b \right) = 2x_n - b x_n^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

収束するための必要十分条件は $0 < a < \frac{2}{b}$ で与えられる。これらのことから Newton 法に比べて，Homotopy 法が初期値選択に対して，ゆるやかであることが分る。図－2は両手法の初期値選択の範囲を図示したものである。また，図－3はHomotopy法に対して初期値aが与えられたときの収束状態を示したものである。

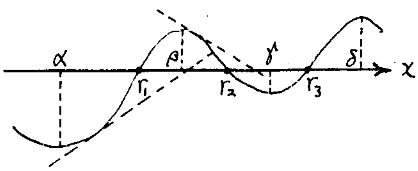
次に，図－4に示す実変数の実関数の根を Homotopy 法(2)によって求めることを考えると，$a \in (\alpha, \beta)$ のとき，解 r_1 が得られ，$a \in (\beta, \gamma)$ のとき，解 r_2 が求められ，$a \in (\gamma, \delta)$ のとき，解 r_3 が求まる。しかし，Newton 法においては $a \in (\alpha, \beta)$ であっても，解 r_1 が求まるとは限らない。この詳細な説明は講演時に譲ることにする。



図－2 初期値選択の範囲



図－3 Homotopy の初期値 a の収束状態.



図－4 実変数の実関数の例

4. Watson の Homotopy

Watson は式(6)を適用するとき，λ, x を Homotopy の解曲線の弧長 s の関数とみなした。すなわち，式(6)を弧長 s について微分し，微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{ds} H(\lambda(s), x(s)) = 0, \lambda(0) = 0, \quad x(0) = a$$

を s について微分して，方程式の解を求めるプログラムを開発している。このプログラムを一部分変更して，筑波大学で稼動するに至った。この稼動により種々の応用分野への適用が今後期待できる。

最後に，本研究は文部省科学研究(試験研究(2))の"非線形連立方程式のホモトピー法による数値解析の研究"【代表者・池辺八洲彦，分担者・丹羽義次，星仰，稲垣敏之，宮本定明，協力者・渡辺英一，浅山泰祐】の成果の一部であることを追記しておく。

参 考 文 献

1) 小島 政和 ： 相補性と不動点 , 産業図書, pp.79 ～ 83, 1981.3.

2) L.T.Watson : A Globolly Convergent Algorithm for Computing Fixed Points of C^2 Maps, APPL. MATH.COMPU. 5:297-311 (1979).

3) J.M.Ortega and W.C.Rheinboldt : Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press,1970.

4) E.L.Allgower : A Survey of Homotopy Methods for Smooth Mappings, Numerical Solution of Nonlinear Equations , Lecture Notes in Mathematics, No.878,Springer-Verlag, 1981.