

東海大学 正員 宇都-馬 冬木 衛 桜井 学

1. まえがき

筆者らは、指数関数系の回帰式 $y = a \{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\}$,
 $y = a e^{-(\frac{x}{b})^m}$ ($m < 0$ あるいは $m > 0$) を用いて、主観を入
 れずに ①杭や地盤の載荷試験から得られる荷重・変位曲線、地
 盤反力係数・変位曲線、②標準貫入試験から得られる打撃回数
 ・累計貫入量曲線、③一軸や三軸圧縮試験から得られる応力・
 ひずみ曲線、④構造物や盛土などの沈下量・時間曲線、⑤圧
 密試験から得られる間隙比・圧密圧力曲線などの整理および評
 価を行なっている。上記回帰式は非線形であるため、回帰係数を求
 める場合、計算式の展開や計算方法などに若干の工夫が必要であ
 るが、これらの計算方法についてはすでに文献(1)~(3)で述べた。

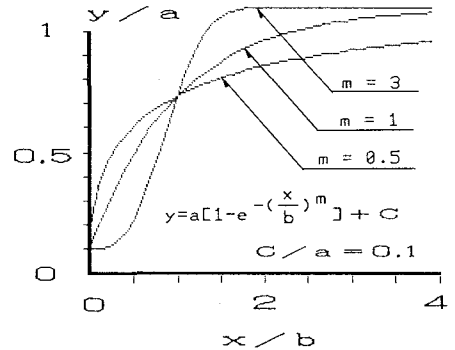


図-1 ワイブル分布曲線

今回の報告は、上記回帰式に定数項を加えて、さらに一般化した回帰式の計算方法について、その概要を述べたものである。

2. 数学モデルと回帰係数を求めるための式の展開およびその解法

数学モデルは(1)式、(2)式で示される。

$$y = a \{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} + C \quad m > 0 \text{ or } m < 0 \quad (1)$$

$$y = a e^{-(\frac{x}{b})^m} + C \quad m < 0 \text{ or } m > 0 \quad (2)$$

ここに、 m , C は正あるいは負の符号をもつ値で、 a , b は正の値である。(1)式、(2)式は、それぞれ統計学で扱うワイブル分布曲線($m=1$ のとき指数分布曲線)、コーシー分布曲線に対応する。(1)式の y および C を a で割って規格化し、 $C/a=0.1$ として m をパラメータとして描いたものが図-1である。

以下に、(1)式、(2)式の回帰係数 m , a , b および C を求めるための式を展開するが、この2つの式はほぼ同じ操作をすることになるので、(1)式を中心に述べて、(2)式については特に必要な部分のみを列挙する。

(1) 式 の 回 帰 モ デ ル を (3) 式 と す る。

$$y = a \{1 - e^{-(\frac{x}{b})^m}\} + C + \varepsilon \quad \varepsilon: \text{誤差項} \quad (3)$$

残差平方和 $S(a, b, C, m)$ は、(3)式に n 組の測定値をあてはめて整理すれば、(4)式で求められる。

$$S(a, b, C, m) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i - a \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\} - C\}^2 \quad (4)$$

(4)式の残差平方和 $S(a, b, C, m)$ が最小になるように、 a , b , C , m を推定することになる。

(4)式を a , b および C について、それぞれ微分し

その結果を0と置くことによって、3つの正規方程式が得られる。この3つの式から a について2つの式と C についての式を求め、2つの式の a を、それぞれ a_1 および a_2 とすれば、(5)式、(6)式、(7)式となる。

$$a_1 = (nF_3 - F_2F_4) / (nF_1 - F_2^2) \quad (5)$$

$$a_2 = (nF_7 - F_4F_6) / (nF_5 - F_2F_6) \quad (6)$$

$$C = (F_4 - aF_2) / n \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} F_1 &= \sum_{i=1}^n \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}^2, \quad F_2 = \sum_{i=1}^n \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}, \\ F_3 &= \sum_{i=1}^n y_i \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}, \quad F_4 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ F_5 &= \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m} \{1 - e^{-(\frac{x_i}{b})^m}\}, \quad F_6 = \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(\frac{x_i}{b})^m}, \\ F_7 &= \sum_{i=1}^n x_i^m y_i e^{-(\frac{x_i}{b})^m} \quad \text{である。} \end{aligned}$$

(5)式から(6)式を引くことによって、 a_1 と a_2 を消去できる。すなわち、(8)式なる形の正規方程式が得られる。

$$f(b, m) \equiv a_1 - a_2 = 0 \quad (8)$$

任意の m について、(8)式を解けば b を求めることができる。これは、Newton-Raphson法によって解くことができる。すなわち、反復関数(9)式を用いて、 b の初期値 b_0 、収束精度 $b \text{ EPS}$ を与えて収束計算すればよい。

$$b_{i+1} = b_i - \{f(b, m) / \partial f(b, m) / \partial b\}_{b=b_i} \quad (9)$$

$$\frac{\partial f(b, m)}{\partial b} = \frac{m}{b^{m+1}} \left[\frac{(-nF_7 + F_4 F_6)(nF_1 - F_2^2) - 2(nF_3 - F_2 F_4)(-nF_5 + F_2 F_6)}{(nF_1 - F_2^2)^2} - \frac{(nF_8 - F_4 F_6)(nF_5 - F_2 F_6) - (nF_7 - F_4 F_6)(nF_1 - F_2 F_6)}{(nF_5 - F_2 F_6)^2} \right]$$

$$F_8 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 y_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_9 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_{10} = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m} \{1 - 2e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\} \text{ である。}$$

(9)式の収束値を(5)式、あるいは(6)式に代入すれば a を求めることができ、この a を(7)式に代入すれば c が求まる。このときの残差平方和 $S(a, b, c, m)$ を(4)式で求め、これが最小になるような m を求めればよいわけである。この手順は文献3)の図-2にフローチャートとして示してあるのを参照されたい。 m の収束計

3. 計算例

平板載荷試験(載荷板 150cm×150cm, 礫層)から得られた荷重・変位曲線の関係に(1)式を適用した計算例を示す。
載荷重と変位の実測値を表-1に示してあり、 X は変位(mm), Y は載荷重(tf/m²)である。 m および b の収束精度を 1×10^{-6} として(1)式にこの5組の実測値をあてはめた結果、回帰係数 m, a, b, c , 残差平方和SSRは表-2の(1)の欄に示すような値となった。実測値を白丸でプロットし、計算結果を描いたものが図-2である。実測値 X に対する Y の計算値を YH として表-1に示してある。また、 $y = a \{1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^m}\} + c$ を適用した場合の回帰係数を表-2に示してあり、表中、(2)は $m=1$ の場合、(3)は m を考慮した場合の値である。(文献5)図-2参照)

4. まとめ

(1)式、(2)式で示される指数関数系の回帰式を用いて、まえがきで述べた①~⑤のような曲線を評価する方法を提案した。(1)式、(2)式の回帰係数のうち、理論的に固定しうることも考えられるので、このような場合の回帰計算については、つぎの機会に述べたい。

参考文献 1)宇都・冬木・近藤・桜井; 74の載荷試験結果の一整理方法, 第3回土質工学研究発表会, 1978.
2)塩井・宇都・冬木・近藤・桜井; 杭の荷重・変位曲線の非線形回帰結果による支持力の一評価法, 第23回土質工学会シンポジウム, 1978.
3)塩井・宇都・冬木・近藤・桜井; 杭の水平載荷試験での降伏点の評価法, 杭の水平載荷試験に関するシンポジウム, 土質工学会, 1979.
4)浅沼・塩井・塩部・宇都・冬木・桜井; 各種施工法による杭の支持力について, 低振動・低騒音杭工法の施工法と支持力に関するシンポジウム, 土質工学会, 1982.
5)窪田・宇都・冬木・桜井; ニューマチッククッション内における平板載荷試験, 平板載荷試験に関するシンポジウム, 土質工学会, 1979.
6)宇都・冬木・桜井; 指数関数系の回帰式について, 第18回土質工学研究発表会, 1983.
7)宇都・冬木・近藤・石塚; 標準貫入試験に関する基礎的研究(3), 第3回土質工学研究発表会, 1978.
8)桜井・溝口・石塚・冬木・宇都; SPTの記録とその整理方法, カウンティングシンポジウム, 土質工学会, 1980.
9)石原・森・木村・宇都・冬木・桜井; 軟弱地盤における橋台水平移動の一予測法, 第26回土質工学会シンポジウム, 1981.
10)石原・小野・有木・宇都・冬木・桜井; アプローチクッション方式橋台の長期沈下予測, 第24回土質工学会シンポジウム, 1979.
11)宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について(その1), 第7回関東支部年次研究発表会, 土木学会, 1980.
12)宇都; コンピュータの利用(主にパーソナルコンピュータを対象にして), 最近の土質・基礎に関する諸問題 講習会講演資料, 土質工学会編, 1982.
13)宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について(その2), 土木学会第37回年次学術講演会, 1982.
14)阪口・駒井・余田; 土川砂床における大型載荷試験結果について(その1), (その2), 第2回土質工学研究発表会, 1977.

算には、フィボナッチ数列を用いると効率がよい。

同様に、(2)式についても以上の手順で収束計算を行えば、回帰係数 a, b, c および m を求めることができる。ただし、この場合(9)式を(9)'式に置き換える必要がある。

$$\frac{\partial f(b, m)}{\partial b} = \frac{m}{b^{m+1}} \left[\frac{(nF_7 - F_4 F_6)(nF_1 - F_2^2) - 2(nF_3 - F_2 F_4)(nF_5 - F_2 F_6)}{(nF_1 - F_2^2)^2} - \frac{(nF_8 - F_4 F_6)(nF_5 - F_2 F_6) - (nF_7 - F_4 F_6)(2nF_{10} - F_2 F_6)}{(nF_5 - F_2 F_6)^2} \right] \quad (9)'$$

$$\text{ここに, } F_1 = \sum_{i=1}^n \left\{ e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m} \right\}^2, F_2 = \sum_{i=1}^n e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_3 = \sum_{i=1}^n x_i e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_4 = \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}, F_5 = \sum_{i=1}^n \{x_i^m e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\}^2, F_{10} = \sum_{i=1}^n \{x_i^m e^{-\left(\frac{x_i}{b}\right)^m}\}^2, F_6 \sim F_9 \text{ は (9) 式と同である。}$$

表-1 使用データ

I	X(I)	Y(I)	YH(I)
1	3.61	26.7	27.3
2	6.07	44.4	43.3
3	13.87	88.9	89.8
4	23.27	133.3	132.8
5	45.09	186.7	186.8

表-2 回帰係数

	(1)	(2)	(3)
M	1.15931	1.0	1.04960
A	208.576	237.642	225.300
B	24.6142	29.0306	26.1767
C	5.94949	0	0
SSR	2.66917	8.83170	4.24789

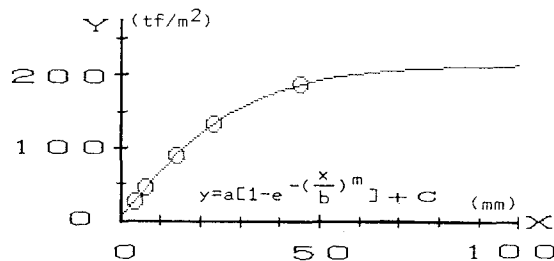


図-2 荷重・変位曲線のあてはめ