

京都大学 工学部 正員 小林 昭一

" 正員 田村 武

" 学生員 〇角 哲也

1. はじめに、地盤材料に対する研究課題は、土構造物の挙動を予測することであり、それは、2つの観点に分かれている。その1つは、変形であり、いま1つは、安定性である。従来からの有限要素法による数値解析では、破壊に至るまでの変形を追跡し、その延長として破壊荷重を推定して構造物の安定性を検討しているにすぎない。そこで、塑性論の上限定理を基礎に、土構造物の破壊荷重とそのメカニズムを直接的に求めることを考えてみよう。これが可能となれば安定性照査における計算効率の向上は言うまでもない。この方法は、骨組構造物を対象として確立されたが、連続体へも拡張され、特に金属の塑性加工の分野では、加工荷重の近似計算において成果をあげている。本報文は、その手法としての剛塑性有限要素法の定式化を述べ、土構造物の支持力問題を例に、その適用性を比較検討したものである。

2. 剛塑性有限要素法の定式化

いま、外力(表面力 T_i , 物体力 X_i)による仕事率が正となる運動学的に可容な速度場(体積一定の条件と速度境界条件を満足する速度場) $\dot{u}_i$ を設定する。これより、びずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 、及び、応力 σ_{ij} (ただし、normality ruleを満足する)が導かれる。以上から求められるエネルギー消散率(1)は、最大塑性仕事の原理と仮想仕事の原理から導かれる上限定理により、真の値よりは小さくならない事が証明される。従って、真の破壊荷重を得るためには、(3)、(4)の制約条件を満たす $\dot{u}_i$ において、(2)なる最小化問題を考えればよい。ここで、 S_0 は応力境界であり、変位境界 S_u では、 $\dot{u}_i = 0$ とする。

以上に提起された問題を、有限次元に下した空間において、数値解析のための定式化を行なう。そこで、外力ベクトル $\mathbb{H}$ 、節点変位速度 $\dot{u}$ 、要素体積変化率への変換行列 L により、(3)、(4)は、(5)、(6)となる。次に、もし $\dot{u}$ が問題の解であるならば、その近傍 $\dot{u} + \delta \dot{u}$ に対し、(8)、(9)のもとで、(7)でなければならぬ。ここで、 B は B -行列、 S は偏差応力のベクトルである。

ところで、線形代数の理論によれば、(7)~(9)は、(10)なる方程式に解入、 μ が存在するための必要十分条件である。明らかに、(10)は、 λ を不定圧、 μ を荷重強度とする時のつりあい条件である。すなわち、問題は、normality ruleより導かれる偏差応力 S と不定圧 λ が、外力 $\mu \mathbb{H}$ とつりあい、かつ(5)、(6)を満たすような速度場 $\dot{u}$ を見つける事に帰着される。さらに、(10)の両辺に $\dot{u}^T$ を左から乗ずれば(11)となり、 μ は、荷重強度の上限値を与えることは明らかである。また、以上の事は、(12)で定義される至 $(\dot{u}, \lambda, \mu)$

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = D(\dot{\epsilon}_{ij}) \quad (1)$$

$$\int D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min \quad (2)$$

sub. to

$$\begin{cases} \int_{S_0} T_i \dot{u}_i dS + \int X_i \dot{u}_i dV = 1 \\ \dot{u}_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{u}_i = 0 \quad (4)$$

$$\mathbb{H}^T \dot{u} = 1 \quad (5)$$

$$L \dot{u} = 0 \quad (6)$$

$$(\int B^T S dV)^T \delta \dot{u} = 0 \quad (7)$$

for $\forall \delta \dot{u}$ s.t.,

$$\begin{cases} \mathbb{H}^T \delta \dot{u} = 0 \\ L \delta \dot{u} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$L \delta \dot{u} = 0 \quad (9)$$

$$\int B^T S dV + L^T \lambda = \mu \mathbb{H} \quad (10)$$

$$\int D(\dot{u}) dV = \mu \quad (11)$$

$$\Phi = \int D(\dot{u}) dV - \lambda^T (L \dot{u}) + \mu (\mathbb{H}^T \dot{u} - 1) \quad (12)$$

$$S_{ij} S_{ij} = \sigma_0^2 \quad (13)$$

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_0 \bar{\epsilon} \quad (14)$$

$$(\bar{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}})$$

の λ , μ に関する停留点を求めることと等価である。

3. 数値解析例、以下の例題では、von Mises の降伏条件(1)を採用し、 $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ は、相当ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ により(14)で計算した。一方、解くべき方程式(5)、(6)、(10)のうち、(10)は λ に関して非線形となり、ここではNewton法による逐次計算法を行なった。

Ex. 1. 半無限地盤への等分布荷重載荷問題

これは、浅い基礎の支持力問題をモデル化したもので、すべり線理論により極限支持力 $q_u = (2 + \pi)\sigma_0$ が得られている。これに対する計算結果は、 $q_u = 5.69$ (ただし $\sigma_0 = 1$ とする)と誤差10.7%であった。ただし、この場合、求下量も一樣とはならない。Fig 1. は、崩壊時における速度場、また、Fig 2. は、その主応力図である。

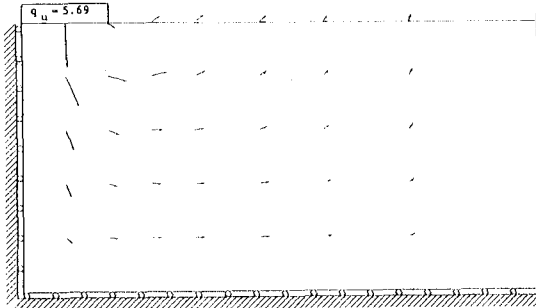


Fig. 1

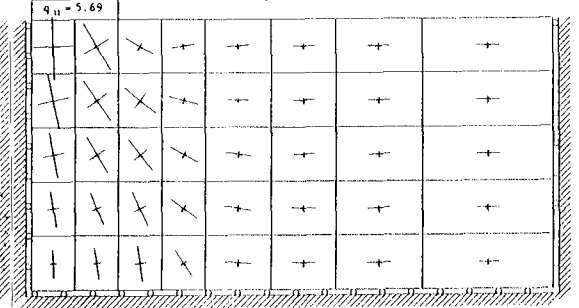


Fig. 2

Ex. 2. 傾斜のある半無限地盤への等分布荷重載荷問題

これは、上記の例題に対して、傾斜角 β ($\beta < 0$)を持つ地盤に適用させたもので、極限支持力は、斜面の影響で $q_u = (2 + \pi + 2\beta)\sigma_0$ と、 β に依存することになる。そこで、本例題では、 $\beta = -30^\circ$ の場合において、等分布荷重を斜面上部に加えた時の崩壊荷重を計算し、 $q_u = 4.21$ (ただし $\sigma_0 = 1$ とする)と、誤差2.8%の計算結果を得た。Fig 3. は、崩壊時における速度場、また、Fig 4. は、その主応力図である。

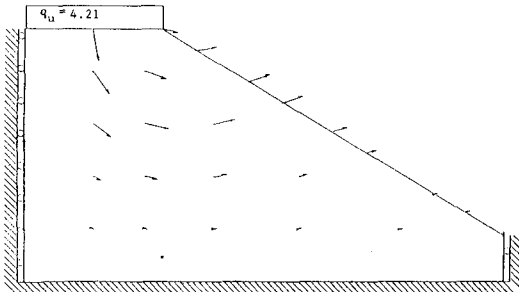


Fig. 3

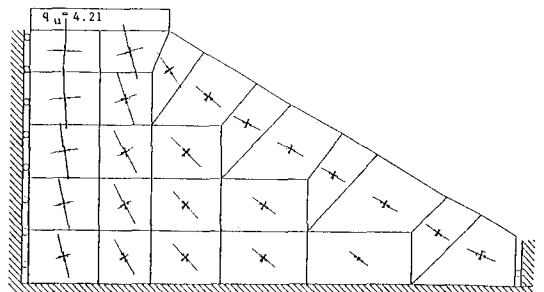


Fig. 4

4. おわりに、以上の2例における既成理論による厳密解との比較検討からも明らかなように、本解法は、信頼するに足る十分な精度を有していることが判明した。一般的な土構造物の解析において、地盤材料に与えられる多くの材料定数を必要とする従来からの方法に対して、安定性解析という目的のためには、土構造物の極限状態だけにその主眼を置いた本法が、計算に要する諸条件を考えると有利ではないかと思われる。

5. 参考文献

- 1) W.H.Chen; "Limit analysis and soil plasticity", Elsevier Scientific Publishing Co., 1975
- 2) 島 進 分担著、「続・初心者のための有限要素法、第4章」、日本材料学会、1982
- 3) 小林 昭一、田村 武、角 哲也、「剛塑性有限要素法による土構造物の極限解析について」、土質工学研究会講演集、1983