

1. はじめに

Biot の方程式に従う多次元圧密と、熱伝導型の方程式に従う他の現象との1つの大きな違いとして Mandel-Cryer 効果が知られている。Mandel により初めて指摘されたように、初期値の最大値よりもなお大きな間げき水圧が出現しうることを意味し、球領域の圧密に対する解析解を用いて Cryer がより明確な形で示したのである。多次元圧密を扱う場合、しばしば Mandel-Cryer 効果の影響が現われるが、そのメカニズムやそれがもたらす結果について議論されたことはあまり見られな。本報告では、簡単な弾性モデルを用いてそのメカニズムを説明するとともに、それが及ぼす特異な現象について考察を加える。

2. 簡単な弾性モデル.

平面ひずみ軸対称問題において、半径方向の変位 u_r と応力 σ_r はそれぞれ

$$\left\{ \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{A}{r} - (1-2\nu) B r \right\} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B \quad (2)$$

で表わされる。ここに μ はせん断弾性定数、 ν はポアソン比である。いま、図-1 (a) (b) のように中空

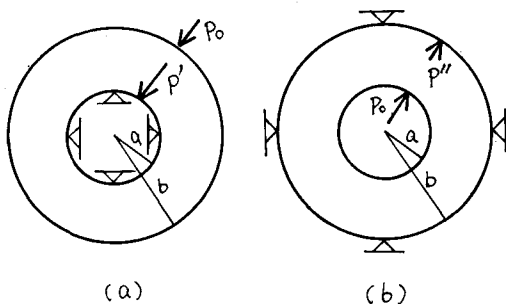


図-1

円領域の外周 $r=b$ (内周 $r=a$) に一様な圧力 P_0 を作用させて、内周 $r=a$ (外周 $r=b$) の変位を零に拘束したとする。このとき、内周(外周)へ伝達される圧力 P' (P'') は次の(3) (4)で表わされることが(1), (2)より導かれる。

$$P' = \frac{2(1-\nu)}{1 + (1-2\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^2} P_0 \quad (3)$$

$$P'' = \frac{2(1-\nu)}{1 + (1-2\nu)\left(\frac{b}{a}\right)^2} P_0 \quad (4)$$

また、同様な境界条件のもとで3次元の場合(中空球領域)を考えると(1)~(4)に対応して以下の(1)'~(4)'を得る。

$$u_r = A r + \frac{B}{r^2} \quad (1)'$$

$$\sigma_r = -\frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} A + 4\mu B \frac{1}{r^3} \quad (2)'$$

$$P' = \frac{3(1-\nu)}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^3} P_0 \quad (3)'$$

$$P'' = \frac{3(1-\nu)}{(1+\nu) + 2(1-2\nu)\left(\frac{b}{a}\right)^3} P_0 \quad (4)'$$

いずれの場合にも $P'' \leq P_0 \leq P' \dots (5)$

であることに注意しておく。

3. 正の Mandel-Cryer 効果. (図-2参照)

球領域の圧密において、一様な初期間げき水圧を仮定すれば中心点における間げき水圧は図-3のように推移する。ポアソン比 ν の大きさに依存するが、 $\nu=0.5$ の場合を除いていずれも圧密開始後に

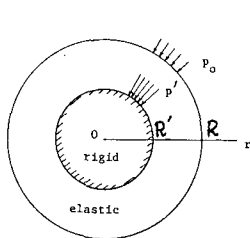


図-2

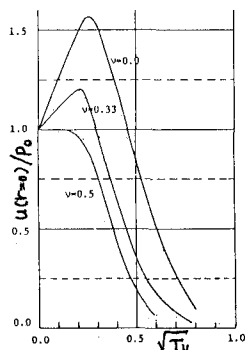


図-3

初期値より大きな値に達する。このことを2.の弾性モデルにより説明すると次のようになる。すなわち、圧密開始後、周面近くの領域の向げき水は直ちに排水される一方、内部ではほとんど非排水状態に近い。そこでいま、半径 $r=R'$ のところに不透水性の膜があり、その外側の領域の向げき水圧が完全に消散したとする。 $r=R'$ の内側では向げき水が移動せずまったく変位が生じない。このとき、 $r=R'$ に生じる圧力 P' は(3')において $a=R'$ 、 $b=R$ といったものに相当する。そのため初期水圧 P_0 よりも大きな向げき水圧が内部に発生することになる。(3')からわかるように、 P' の大きさは不透水膜の位置 R' に依存するが $R' \rightarrow 0$ のとき最大値をとり

$$P' = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} P_0 \quad (6)$$

となる。(3')の代わりに(3)を用いれば、2次元の場合にも同様な結論を得る。

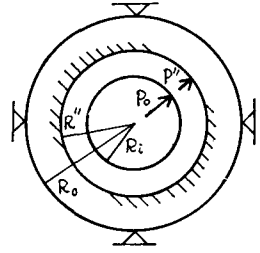


図-4

4. 負の Mandel - Cryer 効果 (図-4参照)

平面ひずみ状態において軸対称領域の外周 $r=R_0$ の変位を固定し、内周 $r=R_i$ からのみ排水させるような圧密問題を考える。内周に P_0 なる圧力を作用させると、その大きさに等しい初期向げき水圧が一樣に発生する。 $n=R_0/R_i$ をパラメータとしたとき圧密度-時間係数曲線は図-5のようになる。熱伝導型の方程式に従う場合と異なり、 n が大きいものほど速く向げき水圧が消散するという興味ある結果を得る。やはり、これも2.で述べた簡単な弾性モデルにより説明することができる。圧密開始後、内周近くの領域の向げき水は直ちに排水される一方、それより外側ではほとんど非排水状態に近い。よって同様に $r=R''$ ($R_i \leq R'' \leq R_0$) の位置に不透水性の膜があり、その内側の向げき水圧が完全に消散したとする。このとき $r=R''$ の外側ではまったく変位が生ぜず、あたかも剛体のごとく挙動する。 $r=R''$ で生じる圧力 P'' は(4)において $a=R_i$ 、 $b=R''$ とおけばよく、

$$P'' = \frac{2(1-\nu)}{1 + (1-2\nu)\left(\frac{R''}{R_i}\right)^2} P_0 \quad (7)$$

として伝達される。いま、 R''/R_i が十分大きいとすると P'' はほとんど零になり、 R'' より外側の領域ではまったく排水をしていないにもかかわらず、向げき水圧が消散してしまうことになる。従って $n=R_0/R_i$ が大きいときでも、内周面近くの領域に向げき水圧が消散すれば、全体の向げき水圧も消散し圧密が促進されることになる。

等ひずみサントドレーンのモデルにおいて、鉛直方向と水平方向の剛性の比を β とし、 $\beta=\infty$ と考えると鉛直ひずみが零となって平面ひずみ状態となり、上の例題に帰着される。図-7に示す $\beta=1$ の場合は、熱伝導型と同様な結果を得るが、図-6のように $\beta=20$ では両者の中間の結果となる。

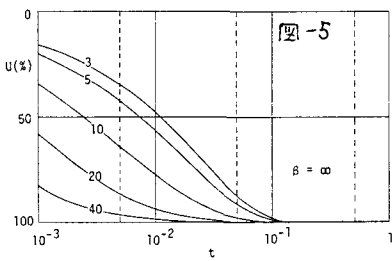


図-5

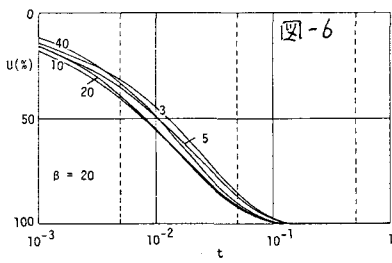


図-6

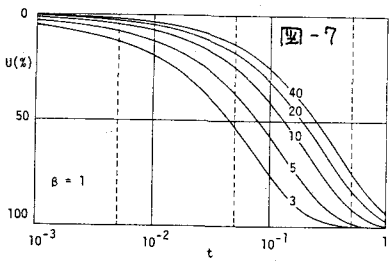


図-7

参考文献 1) 田村 武: Biotの圧密方程式に
関する一考察, 土木学会論文報告集, No. 274, 1978
2) 田村 武: 異方性地盤におけるサントドレーン周辺の圧
密解析, 土木学会論文報告集, (投稿中)