

III-210 力学量 ϵ_{ij} の意義と弾塑性構成式への適用方法

名古屋工業大学 正員 中井 照夫
清水建設(元:名工大大学院) 正員 三原 泰司

現在までに、空間滑動面とそれに基づくひずみ増分量の概念¹⁾から力学量 ϵ_{ij} を提案し、この力学量を用いて粘土や砂の構成式を導びいている。ここでは、 ϵ_{ij} の意味について考えるとともに、修正 Cam-clay Model⁴⁾ を例に、既往の弾塑性理論への適用方法と適用結果について述べる。

1. 力学量 ϵ_{ij} の意味について

力学量 ϵ_{ij} は空間滑動面(SMP)上の応力(σ_{SMP}, τ_{SMP})と主ひずみ増分ベクトルの SMP に垂直な成分および平行な成分($d\epsilon_{SMP}^*, d\sigma_{SMP}^*$)の間にユニークな関係式が成立することに着目して提案されたものであり、その主値が $\epsilon_{ii} = \sigma_i \cdot a_i$ ($i=1, 2, 3, \dots, (1)$) で与えられる対称テンソルである²⁾。ここに、 σ_i は主応力であり、 a_i は主応力軸に対する SMP の方向余弦($a_i = \sqrt{\sigma_i / \sigma_2}$) ($i=1, 2, 3, \dots, (2)$), σ_2, σ_3 : 応力の 2 次, 3 次の不変量)を表わす。また、 ϵ_{ij} を ϵ_{ij} や σ_{ij} と主軸の方向が一致し、その主値の大きさが式(2)の a_i で与えられる対称テンソルとすると、 ϵ_{ij} は σ_{ij} および応力テンソル σ_{ij} を使って、 $\epsilon_{ij} = a_i a_j \cdot \sigma_{ij} \dots (3)$ と書くこともできる。

一方、佐武⁵⁾は粒状体の力学挙動を記述するために、粒状体の構造テンソル $\mathcal{G}_{ij}$ を用いた副応力テンソル $\sigma_{ij}^* = \frac{1}{3} \mathcal{G}_{ij} \cdot \sigma_{ij} \dots (4)$ を提案している。そして、粒状体の微視的研究を参考にして、応力比の変化によって生じる構造変化つまり誘導異方性を表わす $\mathcal{G}_{ij}$ の指標として粒子接点角分布をとっている。いま、式(3)と(4)より、 $\mathcal{G}_{ij}$ に相当するものとして $\mathcal{Q}_{ij}$ を考えれば ϵ_{ij} と σ_{ij}^* が対応関係にあることがわかる。そして、この時 $\mathcal{G}_{ij}$ の主値 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ と主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の間に $\mathcal{G}_1 : \mathcal{G}_2 : \mathcal{G}_3 = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \dots (5)$ なる関係があることが式(2)より理解されるが、これは応力比の増加に伴ない粒子接点角の分布が最大主応力方向に集中するという小田⁶⁾の指摘と矛盾しない。したがって、 ϵ_{ij} は土のような粒状性材料の誘導異方性を反映した力学量であるという解釈もできる。

2. 力学量 ϵ_{ij} の弾塑性理論への適用について

修正 Cam-clay Model⁴⁾ と ϵ_{ij} を適用した ϵ_{ij} Cam-clay Model (Modif.)²⁾ の比較を表にまとめる。

項目	Cam-clay (Modif.)	ϵ_{ij} Cam-clay (Modif.)
① 構成式で用いる 応力、塑性ひずみ増分の定義	$\rho = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, $\bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ $d\epsilon_i^p = d\epsilon_i^e + d\epsilon_i^p + d\epsilon_i^p$ $d\epsilon_{\bar{\rho}}^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(d\epsilon_1^e - d\epsilon_2^e)^2 + (d\epsilon_2^e - d\epsilon_3^e)^2 + (d\epsilon_3^e - d\epsilon_1^e)^2}$	$\tau_N = \tau_{N1} + \tau_{N2} + \tau_{N3}$, $\tau_S = \sqrt{(\tau_{N1} - \tau_{N2})^2 + (\tau_{N2} - \tau_{N3})^2 + (\tau_{N3} - \tau_{N1})^2}$ $d\epsilon_{SMP}^* = d\epsilon_1^e a_1 + d\epsilon_2^e a_2 + d\epsilon_3^e a_3$ $d\epsilon_{SMP}^* = \sqrt{(d\epsilon_1^e a_2 - d\epsilon_2^e a_1)^2 + (d\epsilon_2^e a_3 - d\epsilon_3^e a_2)^2 + (d\epsilon_3^e a_1 - d\epsilon_1^e a_3)^2}$
② 応力比 ~ 塑性ひずみ増分関係 M: 限界状態の $\bar{\rho}/\rho$	$d\epsilon_{\bar{\rho}}^p / d\epsilon_{\bar{\rho}}^e = (M^2 - 1) / (2\eta)$, $\eta = \bar{\rho}/\rho$ (図-1 の点線) M: 限界状態の $\bar{\rho}/\rho$	$d\epsilon_{SMP}^* / d\epsilon_{SMP}^e = (X_2^2 - X_1^2) / (2X) + Y_3$, $X = \tau_S / \tau_N$ (図-2 の実線) $X_2 = (\tau_S / \tau_N)_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{R_3} - \sqrt{R_2})$, $Y_3 = (1 - R_3) / \{ \sqrt{2}(\sqrt{R_3} + 0.5) \}$
③ 硬化パラメータ	$\bar{\epsilon}_v^p$ (応力比一定条件下で、 $\bar{\epsilon}_v^p = \{(\lambda - K) / (1 + e_0)\} \ln(\bar{\rho} / \rho_0)$)	左に同じ
④ 降伏関数	$f = \frac{\lambda - K}{1 + e_0} \left[\ln\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right) + \int_0^{\bar{\rho}} \frac{2\eta \cdot d\eta}{\eta^2 + M^2} \right] - \bar{\epsilon}_v^p = 0$	$f = \frac{\lambda - K}{1 + e_0} \left[\ln\left(\frac{\tau_N}{\tau_{N0}}\right) + \int_0^X \frac{2X \cdot dX}{X^2 + 2Y_3 X + X_2^2} \right] - \bar{\epsilon}_v^p = 0$
⑤ 関連塑性流動則	$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, $\Lambda = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}_v^p} \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}_v^p}{\partial \sigma_{ij}} / \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}_v^p}{\partial \sigma_{ij}} \right)$	$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, $\Lambda = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}_v^p} \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}_v^p}{\partial \sigma_{ij}} / \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}_v^p}{\partial \sigma_{ij}} \right)$

上表に示されているように、既往の Model では σ_{ij} および $d\epsilon_{ij}^p$ の oct 面に垂直な成分と平行な成分間で応力比-塑性ひずみ増分比関係を考え、 σ_{ij} 空間で流動則を仮定している所を、 σ_{ij} の代りに ϵ_{ij} を用いて、 ϵ_{ii} および $d\epsilon_{ii}^p$ の SMP に垂直な成分と平行な成分間で応力比-塑性ひずみ増分比関係を決定し、 ϵ_{ij} 空間で流動則を仮定することにより容易に ϵ_{ij} を使った Model に変換できる。さて、図-1~5 は藤の森粘土²⁾の解析結果と実測値(プロット)を示している。土質パラメータは圧密試験と三軸圧縮強度より $\lambda/(1+e_0) = 5.078\%$, $K/(1+e_0) = 0.694\%$, $(\sigma_{ij}^e / \sigma_{ij}^c)_{(comp.)} = R_3 = 3.5$ ($\rho_{(comp.)} = 33.7^\circ$) と決めている。弾性時のポアソン比 $\nu_0 = 0.3$ としている。図-1, 3, 4 より、既往の Model

では説明できない圧縮・伸張の差異を *tij* Model ではよく説明していることがわかる。また、図-2より *tij* Model の応力比-ひずみ増分比関係がユニークに決り、図-5より *tij* Model が塑性ひずみ増分方向のズレをよく表わしていることが理解される。さて、*tij* Model の降伏関数等は *tij* の主値だけで表わされているが、*tij* は σ_{ij} と主軸の方向が一致するテンソルなので、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \cdot \frac{\partial \sigma_k}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \cdot \frac{\sigma_k}{\sigma_{ij}} \dots (6)$ の関係を使って任意の応力状態下のひずみ増分の計算が可能である。図-7は等方圧密および K_0 圧密($K_0=0.5$)した試料を図-6に示すように純せん断した時の *tij* Model による解析結果である。図-8は K_0 圧密した試料の $\sigma_1, d\sigma_1, d\epsilon_1$ 方向の解析結果を示すが、主応力方向が変化した時も妥当に解析されていることがわかる。

謝辞 日頃有益な議論をいただいている本学松岡元助教授に感謝致します。

文献 1) 中井・松岡(1980): 土木学会論文報告集, No. 303, PP. 65-77. 2) 中井・松岡・三原(1982): 第17回土質工学研究発表会 Vol. 2, PP. 409-412. 3) 中井・松岡・沢田(1983): 第18回土質工学研究発表会(投稿中) 4) Roscoe・Burland (1968): Engineering Plasticity, Cambridge Univ., PP. 535-609. 5) 佐武(1982): 土木学会年講才部, PP. 3-4. 6) 小田(1972): S&F, Vol. 12, No. 2, PP. 1-18.

7) 松岡(1974): S&F, Vol. 14, No. 4, PP. 29-43.

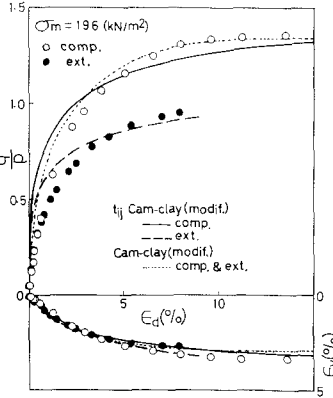


図-3 $q/p \sim \epsilon_d \sim \epsilon_t$ 関係

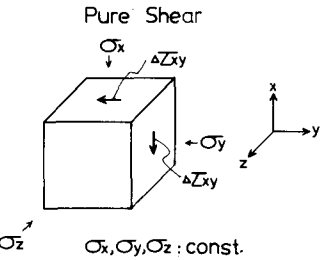


図-6 純せん断試験の解析の説明図

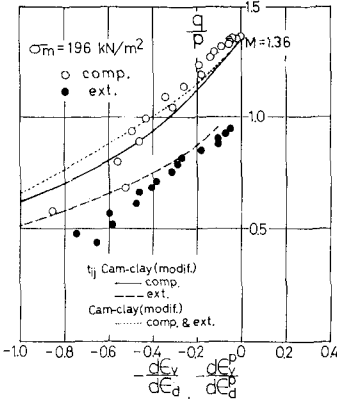


図-4 非排水試験の有効応力経路

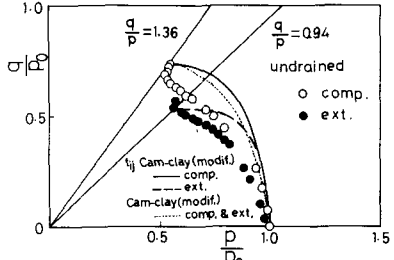


図-7 *tij* Model による $\sigma_{xy}/\sigma_{mo} \sim \gamma_{xy} \sim \epsilon_v$ 関係の解析結果

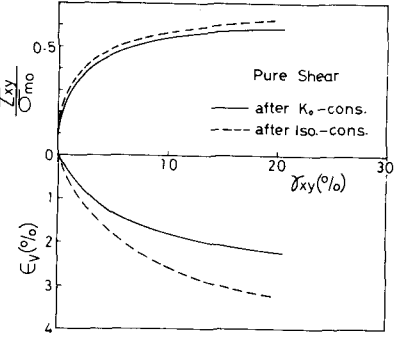


図-8 *tij* Model による $\sigma_1, d\sigma_1, d\epsilon_1$ 方向の解析結果 (K_0 圧密後の純せん断)

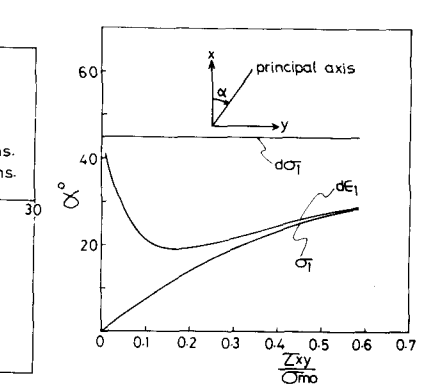
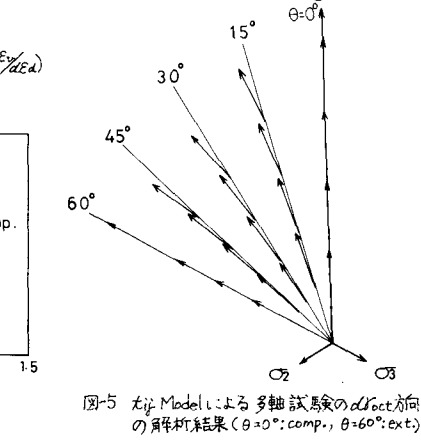
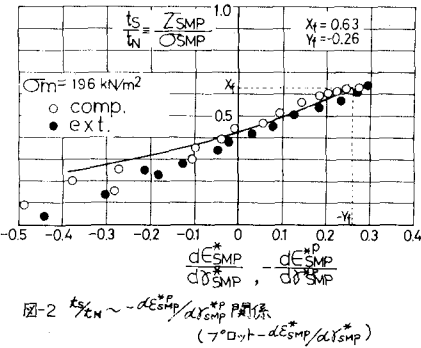


図-8 *tij* Model による $\sigma_1, d\sigma_1, d\epsilon_1$ 方向の解析結果 (K_0 圧密後の純せん断)