

1. まえがき

本報は極限解析の上界定理を用いた塑性問題の数値解析法を提案するものである。支持力問題(極限支持力を求める)の解析法は既発表¹⁾であるが、ここでは安定問題(安全率を求める)の解析法について、引張り亀裂の取扱も含めて、トレスカ材の平面歪問題を例に、理論と解析結果を紹介する。また、この研究を通じて明らかになった通常の円弧すべり解析法の問題点や、安全率の意味についても述べる。

2. 上界定理を用いた安定問題の数値解析法

上界定理は、「任意の可能な変位増分場で、内部仕事と外部仕事の増分を等置して得られる強制力¹⁾は、真の極限支持力より大きい(または等しい)」と表わせる。²⁾例えば平面歪問題で Fig. 1 の 1 次 3 角形要素を用いた変位増分関数を仮定する。

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ \dot{v} = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (1)$$

すると $\dot{\epsilon}_x = \alpha_2, \dot{\epsilon}_y = \alpha_6, \dot{\gamma}_{xy} = \alpha_5$ となり、 u, F_x で歪増分間の適合性は満足される。そして、トレスカ Fig. 1 三角形要素と座標系の降伏条件 $f = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} - 2C = 0$ (C : セン断強度)と関連流則より $\dot{\epsilon}_{\max} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\max}} = -\dot{\epsilon}_{\min}$ を得る。すなわち塑性変形には体積一定という条件が必要で、これは式(1)より

$$b_1 \dot{u}_i + b_2 \dot{u}_j + b_3 \dot{u}_k + c_1 \dot{v}_i + c_2 \dot{v}_j + c_3 \dot{v}_k = 0 \quad (2)$$

と表わせる。また単位体積あたりの内部エネルギー消散率 D は $D = \sigma_{\max} \dot{\epsilon}_{\max} + \sigma_{\min} \dot{\epsilon}_{\min} = \dot{\gamma}_{\max} \cdot C$ で式(1)より次式を得る。

$$D = C \sqrt{(b_1 \dot{u}_i + b_2 \dot{u}_j + b_3 \dot{u}_k - C_1 \dot{v}_i - C_2 \dot{v}_j - C_3 \dot{v}_k)^2 + (C_1 \dot{u}_i + C_2 \dot{u}_j + C_3 \dot{u}_k + b_1 \dot{v}_i + b_2 \dot{v}_j + b_3 \dot{v}_k)^2} / 2\Delta \quad (3)$$

式(2),(3)で $b_i = y_k - y_j, c_i = x_j - x_k$, etc., Δ は 3 角形の面積である。今解析領域に対する外部仕事増分は一般に表面力による E_e と物体力による E_v 、内部仕事増分は塑性による E_p とはつう領域の外部境界面での摩擦による E_f である。

$$E_e = \sum_{\text{node}} (F_{xi} \dot{u}_i + F_{yi} \dot{v}_i) \quad (4)$$

$$E_v = \sum_{\text{ele.}} \left\{ A_x (\dot{u}_i + \dot{u}_j + \dot{u}_k) + A_y (\dot{v}_i + \dot{v}_j + \dot{v}_k) \right\} \frac{\Delta \cdot f_c}{3} \quad (5)$$

$$E_p = \sum_{\text{ele.}} \sqrt{(b_1 \dot{u}_i + b_2 \dot{u}_j + b_3 \dot{u}_k - C_1 \dot{v}_i - C_2 \dot{v}_j - C_3 \dot{v}_k)^2 + (C_1 \dot{u}_i + C_2 \dot{u}_j + C_3 \dot{u}_k + b_1 \dot{v}_i + b_2 \dot{v}_j + b_3 \dot{v}_k)^2} \frac{\Delta \cdot f_c}{2} \quad (6)$$

$$E_f = \sum_{\text{side}} \left\{ (f_{xi} + f_{xj})(x_i - x_j) + (f_{yi} + f_{yj})(y_i - y_j) \right\} \frac{\Delta f}{2} \quad (7)$$

ここで、 F_{xi}, F_{yi} は節点に作用する x, y 方向の外力、 A_x, A_y は x, y 方向の加速度(重力単位)、 f_c は材料の単重、 Δf は付着応力である。仕事の収支から、 $E_e + E_v = E_p + E_f$ である。支持力問題では次の関数 g を定義する。

$$g(\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dots) = F_{xi}^* \dot{v}_i^* = E_p + E_f - E_v - E_e \quad (8)$$

ここで F_{xi}^* は未知の極限支持力、 $\dot{v}_i^*$ は既知の強制変位増分、 E_e には $F_{xi}^* \dot{v}_i^*$ は含まない。そして、要素数得られる式(8)の制約条件下で g を最小化する $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dots, \dot{u}_n, \dot{v}_n$ の分布と g の値を求めることにより、 $F_{xi}^* = g / \dot{v}_i^*$ と極限支持力が得られる。この場合、もし現在の荷重 F_{xi} の安全率 K を求めるなら、 $K = F_{xi}^* / F_{xi}$ とすればよいが、原式に於て次のように考えることもできる。すなわち、現荷重の K 倍の荷重で塑性破壊するなら、仕事の収支から $K F_{xi} \dot{v}_i^* = E_p + E_f - E_v - E_e$ となるので式(8)の g のかわりに $K = (E_p + E_f - E_v - E_e) / (F_{xi} \dot{v}_i^*)$ を最小とすれば、その値が安全率となる。このように対象外力を安全率倍した破壊時の仕事の収支を用いると、安定問題も支持力問題と全く同様に定式化できる。

たとえば斜面の非地震時の安定問題では、対象外力は重力であるから、重力が安全率 K 倍になると、

$$E_v = \sum_{\text{ele.}} (\dot{v}_i + \dot{v}_j + \dot{v}_k) \frac{K \Delta f_c}{3} = K \sum_{\text{ele.}} (\dot{v}_i + \dot{v}_j + \dot{v}_k) \frac{\Delta f_c}{3} = K E_{v0} \quad (9)$$

である。ここで E_{v0} は現重力での重力仕事である。そして、塑性破壊時の仕事の収支から次式を得る。

$$K = (E_p + E_f - E_e) / E_{v0} \quad (10)$$

すなわち、重力に関する安定問題も、支持力問題と同様に、各要素について得られる式(2)の制約条件下で式(10)を最小化するという問題になる。

ただし、このような安定問題では支持力問題と違って、トライアルに各節点に強制変位を与えてそれぞれ安全率を求め、最低の安全率を探すことが必要である。なぜなら、支持力問題では必ず可荷重節点に変位するが物体力が外力である安定問題では全節点に変位の可能

性があるためである。なお、以上のような定式化が、フーロン材に対しても、またFig.1より高級な要素を用いても、三次元問題でも可能なのは明らかである。

こうして得られた等号制約条件つきの非線形最適化問題の解法の紹介は他にゆずるが、大部分の計算センターに計算プログラムが備えられていることを付け加える。

3. 解析例

〈問題〉高さ10mの鉛直斜面で、 $c = 50 \text{ kPa}$ 、 $\gamma_t = 20 \text{ kN/m}^3$ の場合の安全率 F_s を求める。解析はFig.2に示すように幅40m、高さ10m(右半分は20m)の領域に対して行なう。左右および下の境界では節点は完全拘束とする。また、周辺部は2次3角形要素、中央部は1次3角形要素を用いる。

〈解析結果〉最小安全率は、第5節点に強制鉛直変位を与えた時に得られ、 $F_s = 1.153$ であった。この時の変形状態をFig.2に併せて示す。また、第3、第4節点に強制鉛直変位を与えた場合にもほぼこれと同じ安全率と変形状態が得られた。なお、すべり面を仮定する従来の方法で安全率を求めると、 $F_s = 0.85$ (円形すべり面)あるいは、 $F_s = 1.0$ (直線すべり面)を得る。

4. 引張り亀裂の導入

土の引張り抵抗は期待できないから、安定問題に対しても引張り亀裂を考慮した解析法が望まれる。この方法として、Trial Release法を提案する。これは次の手順で行なわれる。①ある要素が存在しないと仮定する。したがって、その要素に対する式(2)、式(6)は無視する。ただしその要素に対する重力仕事である式(4)は考慮する。②最小安全率とそれを与える各節点の変位を求める。③その最小安全率式全要素存在下で求めた安全率より小さく、かつ存在しないと仮定した要素を囲む節点の変位が要素の体積を増加させている時、その要素には引張り

亀裂が存在すると見なす。④引張り亀裂の存在が認められた要素は存在しないと仮定したまま、引張り亀裂の存在が認められなかった要素は再び存在するとして、他の要素について①以降の手順を繰返す。Fig.2と同様の問題を引張り亀裂を考慮して解析した結果をFig.3に示す。理論値の $F_s = 0.85$ に近い値が得られている。

5. 円弧すべり解析法の問題点と安全率の意味

トレスカ材(非排水条件下の粘性土)に対する円弧すべり解析は、明らかに可容な変位場の仮定によっており、上界解析である。レカレ、フーロン材(c, ϕ 材)に対する円弧(あるいは曲面)すべり解析では、変位場の仮定以外に、せん断抵抗を求めるためにせん断面にみける応力の仮定が行なわれる。そして通常、この応力は、釣り合い応力場で与らなれり。したがって、この場合にはこの解析法は上界とも下界とも言えないので、解の取扱には注意が必要である。

また、上界解析という立場から安全率の意味を考えると、仕事の収支 $E_e + E_u = E_p + E_f$ となっていることに注意が必要である。すなわち、 $E_e = E_p$ あるいは $E_u = E_p$ のように2項の場合にのみ、外力に対する安全率とせん断強度に対する安全率が一致するが、一般の4項の場合には一致しない。厳密には各項を確率変数と扱って安全の概念を再検討すべきであろう。

参考文献

- 1) 横: 上界定理を用いた数値解析法, 第18回土質工学研究発表会, 1983. (投稿中)
- 2) CHEN, W.F.: Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier Scientific Pub. Co., pp 1~106, 1975.
- 3) 志水清孝: システム最適化理論, コロナ社, pp 99~104, 1976.

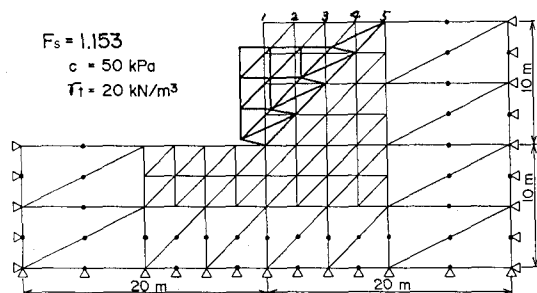


Fig.2 鉛直斜面の安定解析

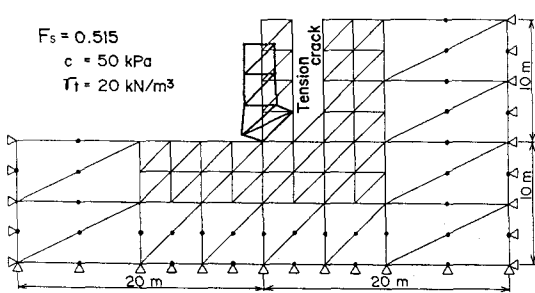


Fig.3 引張り亀裂を考慮した鉛直斜面安定解析