III-128 境界要素法を浸透流解析に適用した場合の基本解の性質について

株式会社 構造計画研究所 正員 ○ 林 保志
藤岡 徹

1. はじめに

境界要素法は、有限要素法に比べて、i)境界上のみをモデル化すればよいこと，ii)そのため、方程式の数が少なくてすむこと，iii)データ作成が容易で計算時間が短く、iv)無限領域の取り扱いが容易であること，等の利点があり、近年、注目を集めてきている数値計算手法である。

本報告は、境界要素法を浸透流解析に適用した場合の、特に井戸の揚水解析または暗渠への浸透水の流れの解析などのように解析領域を無限または半無限領域と想定した方がより適切であるような問題に境界要素法を適用する際の計算結果の解釈について考察したものである。 すなわち、無限領域場における解の挙動を調べて、基本解(有限要素法における重み関数または試行関数に相当する。)の性質について考察する。 議論の簡便さと明確さを図るために、ここでは三次元定常及び二次元定常問題のみを取り扱うことにした。

2. 基本解

境界要素法の詳説は他の参考文献[1)]に譲るものとして、ここでは通常用いられる基本解について式のみを示す。 (透水係数は 1.0 とする。)

2. 1 三次元定常問題

$$u^{*}=(1/4\pi)\cdot(1/r) \tag{1}$$

ここに、u^{*}; 基本解, r ; r 座標

2. 2 二次元定常問題

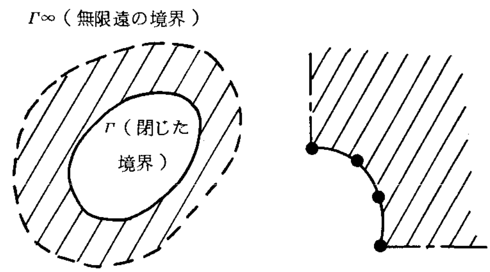
$$u^{*}=(1/2\pi)\,\ell_n(1/r) \tag{2}$$

3. 無限領域の取り扱い方

境界要素法では次式で示される境界積分方程式が解くべき方程式である。

$$c_i u_i+\int_{\Gamma}(uq^{*}-qu^{*})\,d\Gamma=0 \tag{3}$$

ここに、c_i; 境界のなめらかさに依存するパラメータ, u ; ポテンシャル(未知数または境界条件値), q ; フラックス(未知数または境界条件値), Γ ; 境界, q^{*}; $\partial u^{*}/\partial n$ (n は法線方向を示す。)



(a) 仮想の無限境界　(b) 無限領域のモデル化

図−1 無限領域の取り扱い

式(3)の無限領域場への適用性を調べるために図−1(a)に示すような仮想の無限境界Γ_∞を考えると、式(3)は次のようになる。

$$c_i u_i+\int_{\Gamma}(uq^{*}-qu^{*})\,d\Gamma=\int_{\Gamma_\infty}(qu^{*}-q^{*}u)\,d\Gamma_\infty \tag{4}$$

式(4)に三次元及び二次元定常問題の基本解を代入して、基本解の性質を調べる。

3. 1 三次元定常問題

式(1)を式(4)に代入すると、式(4)の右辺は、

$$(1/4\pi)\int_{\Gamma_\infty}(qr-u)\,d\theta d\varphi \tag{5}$$

となる。 ここに、θ ; θ 座標, φ ; φ 座標

Sommerfeldは三次元のHermholtz方程式に対して放射条件[2)]を示したが、これに対するものを式(5)について求めると次式のようになる。

$$\lim_{r\to\infty}(qr-u)=0 \tag{6}$$

三次元定常問題の基本解は、$r\to\infty$ で $u=0$, $q=0$ となるから式(6)を満足する。 したがって、式(4)の右辺がゼロとなり、式(3)と同一の式となる。 すなわち、三次元定常問題の場合は無限領域場に式(3)がそのまま適用でき、そのときの境界条件は $r\to\infty$ で $u=0$, $q=0$ という放射条件である。

3. 2 二次元定常問題

3.1と同様にして二次元定常問題について考察する。 式(2)を式(4)に代入すると、式(4)の右辺は次式のようになる。

$$\int_{\Gamma_\infty}(-1/2\pi)(qr\,\ell_n r+u)\,d\theta \tag{7}$$

二次元定常問題の基本解は、$r \rightarrow \infty$ で $u = -\infty$ であり、また式(7)はゼロとはならないので、放射条件で解くことはできない。　しかし、ある条件下では解くことはできる。　まず、榎園[3]にしたがって無限領域の場合の定式化について述べる。

式(3)をMatrix表示すると、

$$(1+c_i)u + \sum_{j=1}^{n} H_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}q_j \tag{8}$$

を得るが、さらに整理して、

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{H}_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}q_j \tag{9}$$

を得る。有限領域の場合には、

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{H}_{ij} = 0 \tag{10}$$

が成立するが、無限領域の場合には、

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{H}_{ij} = 1 \tag{11}$$

となる。

無限領域の定式化については式(11)により行うことができるが、これにより解いた答の意味については次の解析例で述べることにする。

4．解析例

半径2の球面及び円周上でポテンシャル値を10として無限領域を解いた場合の三次元及び二次元定常問題の計算結果を図－2及び図－3に示す。　同図には解析解も示してある。　解析解と計算結果は良く一致しているが、三次元定常問題の解析解は、$r \rightarrow \infty$ で $u = 0$ としたもので、

$$u = 20/r \tag{12}$$

と表わされる。　二次元定常問題の解析解は、$r \rightarrow \infty$ で $u = \infty$ として求めた解

$$u = ((10-2)/\ell_n 2)\ell_n r + c \tag{13}$$

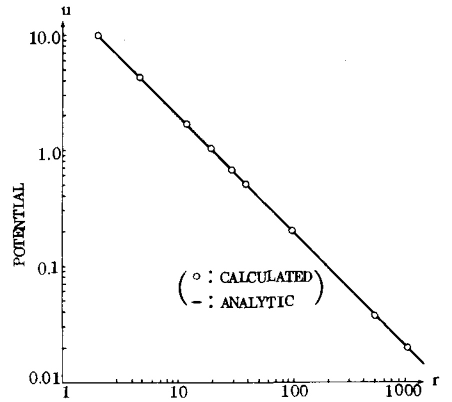
のうち、$c = 0$ としたものである。

すなわち、三次元定常問題の計算結果は解析的に一意的に求められた解と一致するが、二次元定常問題の計算結果は解析解のうちの一つの解とよく一致する。　このような結果が得られたのは、三次元及び二次元定常問題で採用した基本解に起因していると考えられる。

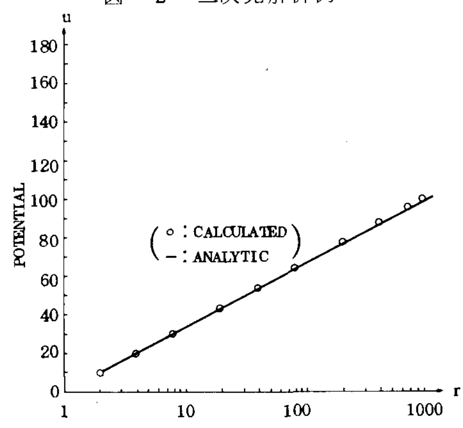
5．おわりに

以上簡単ではあるが、無限領域における三次元及び二次元定常問題の基本解の性質について考察した。

解析例より、三次元定常問題の場合は放射条件が自動的に考慮できるが、二次元定常問題の場合はこの条件を考慮することは難しく、無限遠で $u = \infty$ という境界条件として解かれることがわかった。　また、二次元定常問題の場合は、$\hat{H}$ マトリックスの総和が1になるということに注意しなければならない。



図－2　三次元解析例



図－3　二次元解析例

最後に、本報告は当所の故服部正博士により紹介された境界要素法を浸透流解析に適用するための検討に端を発したものであることを記しておく。　ここに感謝の意を表するとともに服部所長のご冥福をお祈りします。

参考文献

(1)　たとえば、C. A. Brebbia；The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, (1978)：邦訳　神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭（共訳）；境界要素法入門, 培風館(1980)

(2)　Sommerfeld, A., Partial Differential Equation in Physics, Academic Press, New York

(3)　榎園正人；BEM(境界要素法)の基礎とマイコンによるプログラム実例集, 境界要素法研究会(1983)