III-30　不連続面の幾何学性に関する相似則について

埼玉大学工学部　小田匡寛

1．はじめに　　天然の岩盤は、断層・節理などの不連続面（クラックと呼ぶ）によって断ち切られていて，その力学的挙動は、クラックの幾何学性（クラック密度、クラックの大きさ・方向の分布）や、クラックの物理性・力学性（剪断・垂直剛性、摩擦角、クラック拡大係数）によって支配されている。規模の大きい断層は、例えばジョイント要素として有限要素解析に直接取り込み、その影響を評価できる。しかし規模の小さい断層や節理はその複雑な幾何学性の為に、何らかの単純化無くしては到底解析し得るものでは無い。この研究は、クラック・テンソルの考え方を発展させ、クラックの幾何学性に関する相似則を提案する為のものであり、岩盤のモデル化に一つの基礎を与える事を意図している。

2．一般化されたクラック・テンソル　　岩盤の調査は、巨視的にみて均質な領域の判定から始まると考えてよい。ある領域が巨視的に均質な岩盤と見なせるか否かの判断基準は、もちろん対象とする構造物の大きさや要求される調査精度で決まる。“巨視的に均質”とは、“統計的に均一”と翻訳できる。統計的に均一な岩盤のクラックの幾何学性を表現するには、(1)クラックの体積密度 $\rho = m^{(V)}/V$（$m^{(V)}$= 統計的に均質とみなせる岩盤の体積 V 中に存在するクラック数）、(2)クラックの大きさを表わす密度関数 $f(r)$（クラックを円で近似した時の直径を r とする）、(3)クラックの方向を表わす密度関数 $E(\mathbf{n}, r)$（$\mathbf{n}$ = クラックの単位法線ベクトル）の三要素を少くとも含まなければならない。今、次の m 階のテンソル $F_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ を考える。

$$F_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \frac{\pi\rho}{4}\int_0^\infty\int_\Omega r^3 n_{i_1} n_{i_2}\cdots n_{i_m} E(\mathbf{n}, r)\, d\Omega\, dr \quad (i_1, i_2, \cdots, i_m = 1, 2, 3) \tag{1}$$

ただし n_{ip} は基底ベクトル $\mathbf{e}_{ip}$ ($ip = 1, 2, 3$) への $\mathbf{n}$ の成分であり、Ω は単位球の表面で与えられる立体角とする。(1)式で定義される $F_{i_1 i_2 \cdots i_m}$（一般化されたクラック・テンソルと呼ぶ）は以下の性質を持っている。

(1)無次元量である。

(2)密度関数 $E(\mathbf{n}, r)$ の対称性（$E(\mathbf{n}, r) = E(-\mathbf{n}, r)$）の為に、階数 m は偶数となる。（m は $2m$ ($m = 1, 2, 3$) と書ける。）

(3)定義から明らかなように、添字 $i_1, i_2, \cdots, i_{2m}$ は相互に可換である為、次式が成立する。

$$F_{i_1 i_2 \cdots i_{2m}} = F_{i_2 i_1 \cdots i_{2m}} = F_{i_{2m} i_2 \cdots i_1} \tag{2}$$

(4)添字のどのようなペアでも縮約すると、2階低いテンソルを得る事ができる。$\delta_{ij} n_i n_j = 1$ を考慮して縮約すると

$$F_{ijkl} = \frac{\pi\rho}{4}\int_0^\infty\int_\Omega r^3 n_i n_j n_k n_l E(\mathbf{n}, r)\, d\Omega\, dr \tag{3}$$

$$F_{ij} = \frac{\pi\rho}{4}\int_0^\infty\int_\Omega r^3 n_i n_j E(\mathbf{n}, r)\, d\Omega\, dr \tag{4}$$

$$F_0 = \frac{\pi\rho}{4}\int_0^\infty r^3 f(r)\, dr \tag{5}$$

を得る事ができる。

(5)緒形らの実測によると、断層破砕帯の幅は、その大きさ（拡がり）に比例している。もしクラックの平均的な幅がその大きさに比例すると仮定できれば、F_0 は岩盤の間隙率と等価な意味を持つ事が証明できる。

(6) F_{ij} は既にクラック・テンソルとして提案されていて、その幾何学的意味は文献(1)に詳しい。

(7)更に高階のテンソルの幾何学的意味は明らかでない。しかし高階なものほどより細部の幾何学性を反映している事が、以下に述べる例からも知る事ができる。もし(A), (B)二つの供試体で $F^{(A)}_{i_1 i_2 \cdots i_{2m}} = F^{(B)}_{i_1 i_2 \cdots i_{2m}}$ であれば $2m$ 階以下の全てのテンソルは恒等的に一致する。

3．幾何学性に関する相似則　　二つの統計的に均一な不連続性材料(A), (B)を考える。今、次の等式を満

足すれば、(A),(B)のクラックの幾何学性は相似であると定義する。

$$\lim_{2m\to\infty} F^{(A)}_{i_1 i_2\cdots i_{2m}} = \lim_{2m\to\infty} F^{(B)}_{i_1 i_2\cdots i_{2m}} \tag{6}$$

もし単位法線ベクトル$\mathbf{n}$が直径rと統計的に独立であると見なせば、(6)式は次のように書き直せる。

$$F_0^{(A)} \lim_{2m\to\infty} N^{(A)}_{i_1 i_2\cdots i_{2m}} = F_0^{(B)} \lim_{2m\to\infty} N^{(B)}_{i_1 i_2\cdots i_{2m}} \tag{7}$$

ただし

$$N_{i_1 i_2\cdots i_{2m}} = \int_\Omega n_{i_1} n_{i_2}\cdots n_{i_{2m}} E(\mathbf{n})\, d\Omega \tag{8}$$

(7)、(8)の条件は、$F_0^{(A)}=F_0^{(B)}$と$E(\mathbf{n})^{(A)}=E(\mathbf{n})^{(B)}$とに等価である。(6)式はただ単に幾何学的に相似である事を定義しているにすぎない。この定義が有効である為には、次の二つの疑問が解決されなければならない。(1). (6)式の定義する幾何学性の相似条件は、力学的な相似の為の必要条件となり得るか否か？(2). (1)式で定義される一般化されたクラック・テンソルを実際の岩盤で決定できるだろうか？最近の研究によれば、これらの疑問に対する解答はpositiveであるが、ここでそれを詳述する余裕は無い。ここでは一つの例を示す事によって、(6)式で示される幾何学性に関する相似則の意味を考えてみるに止めよう。

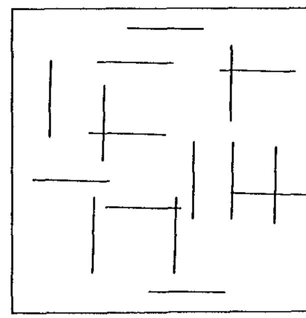

図-1

4. 等方性の供試体を作る方法　今、クラックを有する三つの二次元供試体(A)、(B)、(C)を考える。(図の書きやすさを考え二次元の例を示すが、三次元についても全く同様に取り扱える。)図1~3に示す供試体(A)、(B)、(C)の四階までのクラック・テンソルは次の通りである。

(1)供試体(A)　(2)供試体(B)　(3)供試体(C)ー完全等方体ー

$F_0^{(A)}=1$　$F_0^{(B)}=1$　$F_0^{(C)}=1$

$$F_{ij}^{(A)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ & 0.5\end{pmatrix}\quad F_{ij}^{(B)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ & 0.5\end{pmatrix}\quad F_{ij}^{(C)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ & 0.5\end{pmatrix}$$

$$F_{ijkl}^{(A)}=\begin{pmatrix}F_{1111} & F_{1122} & F_{1112}\\ & F_{2222} & F_{2212}\\ & & F_{1212}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0\\ & 0.5 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$$

$$F_{ijkl}^{(B)}=\begin{pmatrix}0.375 & 0.125 & 0\\ & 0.375 & 0\\ & & 0.125\end{pmatrix}\quad F_{ijkl}^{(C)}=\begin{pmatrix}0.375 & 0.125 & 0\\ & 0.375 & 0\\ & & 0.125\end{pmatrix}$$

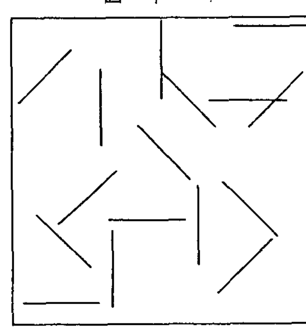

図-2

$F_0^{(A)}=F_0^{(B)}=F_0^{(C)}$, $F_{ij}^{(A)}=F_{ij}^{(B)}=F_{ij}^{(C)}=0.5\delta_{ij}$となり、二階のクラック・テンソルでクラックの幾何学性を表わすとすれば、三つの供試体はいずれも"等方"と判断される。四階まで考慮すると、(A)は等方とは認められないが、(B)は等方の条件を満足している。更に高階のクラック・テンソルを考えると、(B)も等方性を失う。第一近似として(A)を等方供試体として扱う事は可能であろう。しかしより高い精度の等方性供試体が要求されれば、更に高階のテンソルをも等方にしなければならないのは勿論である。

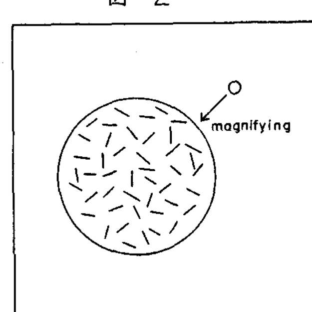

図-3

$m^{(V)}\to\infty$
$r\to 0$
$F_0=1$
$E(\theta)=1/2\pi$

参考文献) (1) M.Oda (1983) "A Method for Evaluating the Effect of Crack Geometry on the Mechanical Behavior of Cracked Rock Masses", Mechanics of Materials