III-17　変分法則によるRoweのストレス～ダイレイタンシー関係に関する考察

東北大学大学院　学生員　森永　慶
東北大学工学部　正　員　新関　茂

1）まえがき

粒状体の構成関係式の中で、ストレス～ダイレイタンシー関係式は最も基本的な関係式の一つである。このような関係式は幾つか提案されているが、それらの内でRoweによって提案されたストレス～ダイレイタンシー関係式は、純理論的観点から導かれたものであり、検討が容易であるため、「エネルギー比最小の原理」やこの関係式中の物理的摩擦角φ_μの力学的意味など種々の観点から論議されてきた。本文は、応力比～内部摩擦角関係と歪増分比～ダイレイタンシー角の間の関係に変分法則を適用して、誘導した内部摩擦角とダイレイタンシー角の間に成立する微分方程式を解析することにより、Roweのストレス～ダイレイタンシー関係を考察し、パラメーターφ_μの力学的意味などを明らかにしたものである。

2）内部摩擦角～ダイレイタンシー角，ストレス～ダイレイタンシー関係式の誘導

図-1,2に示すモールの応力円，歪増分円の幾何学的性質より次式が成立する。

$$\sigma_1/\sigma_2=\tan^2(\pi/4+\varphi/2) \qquad (2.1)$$

$$-d\varepsilon_2/d\varepsilon_1=\tan^2(\pi/4+\nu/2) \qquad (2.2)$$

ここに、σ_1，σ_2は主応力、$d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$は主歪増分（ともに、圧縮が正）、φは内部摩擦角、νは体積歪増分をdv（圧縮が正）、最大せん断歪増分を$d\gamma$として、次式により定義されるダイレイタンシー角

$$\sin\nu=-dv/d\gamma=-(d\varepsilon_1+d\varepsilon_2)/(d\varepsilon_1-d\varepsilon_2) \qquad (2.3)$$

である。したがって、式(2.1)，(2.2)より、

$$-\frac{\sigma_1\cdot d\varepsilon_1}{\sigma_2\cdot d\varepsilon_2}=\frac{\tan^2(\pi/4+\varphi/2)}{\tan^2(\pi/4+\nu/2)} \qquad (2.4)$$

と表わすことができる。粒状体において内部摩擦角φと、ダイレイタンシー角νとの間には関数関係が存在すると考えられるので、

$$\theta=\pi/4+\nu/2\,,\quad g(\theta)=\pi/4+\varphi(\nu)/2 \qquad (2.5)$$

とおけば、式(2.4)は、次のように書き換えられる。

$$-\frac{\sigma_1\cdot d\varepsilon_1}{\sigma_2\cdot d\varepsilon_2}=\frac{\tan^2 g(\theta)}{\tan^2\theta} \qquad (2.6)$$

上式は、Roweによって提案されたストレス～ダイレイタンシー関係式と同一の形式となっており、著者の1人が提案した変分法則[1)]によれば上式の主応力，主歪増分がそれぞれ真の値（実測値）σ_1^*, σ_2^*, $d\varepsilon_1^*$, $d\varepsilon_2^*$を取るとき、右辺は最小とならねばならないことになる[2)]。すなはち、

$$-\frac{\sigma_1^*\cdot d\varepsilon_1^*}{\sigma_2^*\cdot d\varepsilon_2^*}=\left[\frac{\tan^2 g(\theta)}{\tan^2\theta}\right]_{min} \qquad (2.7)$$

であり、同時に，上式はエネルギー保存則となっていなければならない。したがって、φとνの範囲（$0\leqq\varphi\leqq\pi/2$，$-\pi/2\leqq\nu\leqq\pi/2$）を考慮すると，式(2.7)より，

$$F=\tan g(\theta)/\tan\theta \qquad (2.8)$$

が最小となるときのgとθの関係が真のgとθの関係を与えることとなる。Fが最小となるための必要条件は、Fの第1変分をδFとすると、

$$\delta F=0 \qquad (2.9)$$

であるから、式(2.8)，(2.9)より次の微分方程式が導かれる。

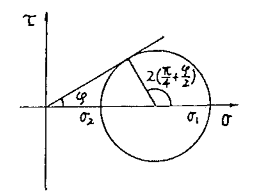

図-1　モールの応力円

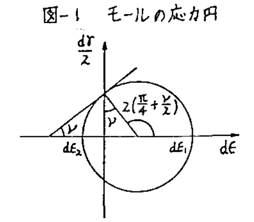

図-2　モールの歪増分円

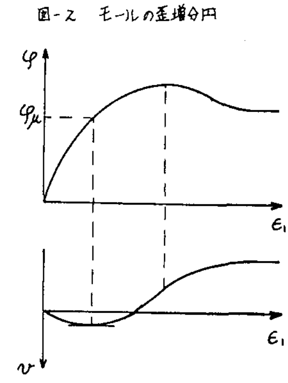

図-3　内部摩擦角～歪関係

$$d\xi/\sin 2\xi = d\theta/\sin 2\theta \qquad (2.10)$$

式(2.10)の解は、

$$\tan\theta = k\tan\xi \qquad (2.11)$$

図-3に示すように、変形に伴うダイレイタンシー効果を含まない最小体積状態における内部摩擦角をφ_μとすれば、

$$\nu = 0\ (\xi = \pi/4)\text{のとき}\ \varphi = \varphi_\mu\ (\theta = \pi/4 + \pi/2) \qquad (2.12)$$

であるから、式(2.11), (2.12)より、定数kは次のように決定される。

$$k = \tan(\pi/4 + \varphi_\mu/2) \qquad (2.13)$$

したがって、内部摩擦角φとダイレイタンシー角νの関係は、式(2.5),(2.11),(2.13)より、

$$\varphi = 2\tan^{-1}\left[\tan(\pi/4 + \varphi_\mu/2)\cdot\tan(\pi/4 + \nu/2)\right] - \pi/2 \qquad (2.14)$$

と記すことができる。さらに、ストレス～ダイレイタンシー関係式は、式(2.4),(2.11),(2.13)より、

$$-\frac{\sigma_1^* \cdot d\varepsilon_1^*}{\sigma_2^* \cdot d\varepsilon_2^*} = \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^* (1 - dv^*/d\varepsilon_1^*)} = \tan^2(\pi/4 + \varphi_\mu/2) \qquad (2.15)$$

となり、上式は平面歪状態を含む2次元のRoweのストレス～ダイレイタンシー関係式と一致し、さらに三軸応力状態に対してはエネルギー保存則を考慮し、上式は、

$$-\frac{\sigma_1^* d\varepsilon_1^*}{2\sigma_3^* d\varepsilon_3^*} = \frac{\sigma_1^*}{\sigma_3^* (1 - dv^*/d\varepsilon_1^*)} = \tan^2(\pi/4 + \varphi_\mu/2) \qquad (2.16)$$

と書き換えられる。ただしこの場合もφ_μは最小体積状態の内部摩擦角とする。図-4,5は、φ_μを最小体積状態における内部摩擦角として、平面歪及び三軸圧縮状態における、Rowe[3]、及び小田[4]の実験データと式(2.15),(2.16)を比較したものであるが、両者は非常に良く一致している。

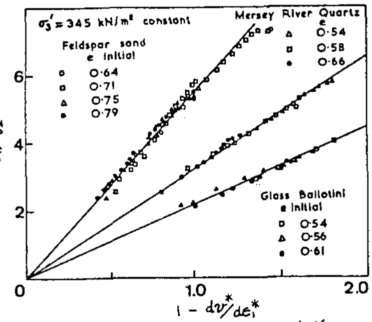

図-4　ストレス～ダイレイタンシー関係

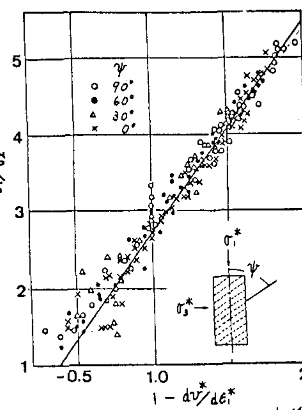

図-5　ストレス～ダイレイタンシー関係

3) 考察

前節では、式(2.6)に変分法則を応用して変数分離形の微分方程式を求め、Roweのストレス～ダイレイタンシー関係式の誘導を行った。この誘導方法をRoweによる定式化と比較した場合、式(2.1)は平衡方程式、また式(2.2)は適合条件式に対応し、粒子集合体の運動に関する構成関係を変分法則から求めた微分方程式の解によって導入したことに相当していると考えられる。Roweの理論におけるように単なる通常の関数の極値問題ではなく、変分問題として、関数形を決定しているので、そのぶんだけ自由度の大きい一般的誘導方法となっているものと考えられる。

また、Roweは同一の材料を用いても三軸圧縮と平面歪試験のように、実験条件によってφ_μが異なった値を取ることから、φ_μをφ_fと置きかえ、三軸応力状態にはφ_μを、また平面歪状態に対してはφ_{cv}を対応させ、Procter[5]等が指適しているように、

$$\varphi_\mu \leqq \varphi_f \leqq \varphi_{cv} \qquad (3.1)$$

の上下界関係が成立するとして、これ以上の説明を行っておらず、現在でもこのままの状況になっていると思われる。一方、前節の変分法則によるRoweの理論の再検討は、Roweのストレス～ダイレイタンシー関係式中のφ_μは、最小体積状態における内部摩擦角でなければならないことを示しており、三軸圧縮及び平面歪試験における実測値を比較した結果は非常に良く一致している。これらの事実は、Roweのストレス～ダイレイタンシー関係式中のφ_μは、個々の粒子間における摩擦角ではなく、個々の粒子の集合体に関する平均的摩擦角で、粒子集合体の運動機構に強く依存する値であり、また理論的考察からも明らかなように、φ_μは三軸圧縮及び平面歪の両試験において最小体積状態における内部摩擦角として定義するのが適切であることを示している。

謝辞　本文をまとめるにあたり、有益な助言を賜わった東北大学工学部　佐武正雄教授に謝意を表します。

参考文献　1) S. Niiseki: Finite Element on Flow Analysis, University of Tokyo Press, 1982, pp237-244　2) 新関, 佐武: 土木学会第36回年次学術講演会講演概要集, III, 1981, pp5-6　3) P.W. Rowe: Stress-Strain behaviour of Soils, 1971, pp143-194　4) Oda, M.: Soils and Foundations 1972b, Vol.12, No.2, pp1-18　5) D.C. Procter: Géotechnique, Vol.24, No.3, pp269-288