

1. はじめに

傾斜沈殿は懸濁粒子の沈殿除去促進に有効な物理的単位操作の1つとして注目されており、近年、水処理に応用する例が多くなってきた。しかし、傾斜沈殿に関する水理学的な理論解析は殆んどなされておらず、粒子沈殿除去促進の機構についても直感的な説明がなされているにすぎない。懸濁液中の傾斜面下には沉降対流に起因する清澄層が発達するが、この清澄層内の流れが懸濁粒子の沈殿除去促進に寄与すると言われている。そこで、傾斜面下の清澄層内の流動特性を、流れの境界層近似と運動量積分とによって、理論的に解析し、数値計算を行なった。解析の結果は、従来から報告されている傾斜沈殿の実験結果と矛盾しない事を示している。

2. 支配方程式と境界条件

Fig. 1 に示す様に、傾斜面下端を原点とし、 x 軸を傾斜面に沿って上向きに、 y 軸を x 軸と垂直下向きにとる。このとき、傾斜面下に生成する清澄層流れの支配方程式は、運動方程式 (Eq. 1)、連続方程式 (Eq. 2)、界面方程式 (Eq. 3) で構成される。 θ は傾斜面の鉛直からの傾斜角 [degree] で、 $\hat{u}_x$ 、

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial \hat{y}^2} + \cos \theta = A \left(\hat{u}_x \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{u}_y \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}} \right) \quad (1), \quad A = Re \Gamma^{1/3} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2), \quad Re = \frac{l v_p}{\nu} \quad (5)$$

$$\hat{u}_{x1} \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} - \hat{u}_{y1} - \sin \theta = 0 \quad (3), \quad \Gamma = 18 \left(\frac{l}{d_p} \right)^2 \phi \quad (6)$$

$\hat{u}_{y1}$ は清澄液と懸濁液との界面 ($y = \delta$) における $\hat{u}_x$ 、 $\hat{u}_y$ の値である。また無次元数 A は Eq. 4 で定義される。ただし、 v_p は懸濁粒子群の鉛直沈殿における沈降速度 [cm/s]、 d_p は懸濁粒子径 [cm]、 l は傾斜面の水面下の長さ [cm]、 ϕ は懸濁液の粒子体積濃度 [-]、 ν は水の動粘性係数 [cm^2/s] である。各変数 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{\delta}$ 、 $\hat{u}_x$ 、 $\hat{u}_y$ は、それぞれ、座標 x 、 y 、清澄層厚 δ 、流速の x 、 y 成分 u_x 、 u_y を無次元化した後、伸縮変換を施したもので Eqs. 7~11 で与えられる。従って

$$\hat{x} = \frac{x}{l}, \quad \hat{y} = \frac{y}{l}, \quad \hat{\delta} = \Gamma^{1/3} \frac{\delta}{l} \quad (7), (8), (9)$$

$$\hat{u}_x = \Gamma^{1/3} \frac{u_x}{v_p}, \quad \hat{u}_y = \frac{u_y}{v_p} \quad (10), (11)$$

で、Eqs. 1~3 の各変数は同じオーダーの大きさを有する。運動方程式中の慣性項の寄与の程度は無次元数 A の大きさによって支配される。次に、支配方程式に対する境界条件は、傾斜面下端 ($\hat{x} = 0$)、傾斜面 ($\hat{y} = 0$)、清澄層と懸濁液との界面 ($\hat{y} = \hat{\delta}$) で Eqs. 12~16 のごとく与えられる。ただし、界面の流速 $\hat{u}_{x1}$ は未知で $\hat{x}$ の関数である。

$$\hat{\delta} = 0 \text{ at } \hat{x} = 0, \quad \hat{u}_x = 0 \text{ at } \hat{y} = 0, \quad \hat{u}_y = 0 \text{ at } \hat{y} = 0, \quad \hat{u}_x = \hat{u}_{x1} \text{ at } \hat{y} = \hat{\delta}, \quad \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (12), (13), (14), (15), (16)$$

3. 近似解

Eq. 17 で定義する相似変数 η を導入し、さらに $\hat{u}_x$ を Eq. 18 の様に界面速度 $\hat{u}_{x1}$ と η の99項式で与えられる関数 $\phi(\eta)$ との形で表わされるものと仮定する。このとき元の支配方程式は常微分方程式となる。未知関数 $\phi(\eta)$ は前述の境界条件により決定する事ができる。Eqs. 13, 15, 16 より $\phi(0) = 0$ 、 $\phi(1) = 1$ 、 $\phi'(1) = 0$ である

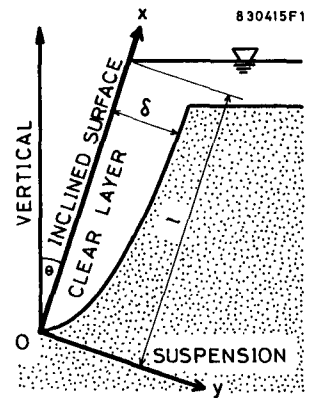


FIG. 1.-DEFINITION SKETCH

から $\phi(\eta)$ は η の 2 次式となり E_g.19 で与えられる。ま

$$\eta = \frac{\hat{x}}{\delta}, \quad \hat{u}_x = \hat{u}_{x1} \phi(\eta), \quad \phi(\eta) = 2\eta - \eta^2 \dots (17), (18), (19)$$

た $\hat{u}_y$ は連続方程式を $\eta = 0 \sim \eta$ で積分し E_g.20 で求

$$\hat{u}_y = \hat{u}_{x1} \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} \phi\eta - \frac{d}{d\hat{x}} \left(\hat{u}_{x1} \hat{\delta} \right) \int_0^\eta \phi d\eta \dots (20)$$

められる。運動量積分方程式は E_g.1 を $\eta = 0 \sim 1$ で

積分すれば E_g.21 の様に得られる。また界面方程式は

E_g.22 の様になる。ただし、関数 $F(\hat{x})$ は E_g.23 で与えら

$$\frac{\hat{u}_{x1}}{\delta^2} \left(\int_0^1 \frac{d^2\phi}{d\eta^2} \right) d\eta + \cos\theta \cdot [1 - F(\hat{x})] = 0 \dots (21)$$

$$\frac{d}{d\hat{x}} \left(\hat{u}_{x1} \hat{\delta} \right) \int_0^1 \phi d\eta = \sin\theta \dots (22)$$

れる。 $F(\hat{x})$ は運動方程式中の慣性項に由来し、その

$$F(\hat{x}) = \frac{A}{\delta} \tan\theta \left\{ - \frac{\int_0^1 \phi^2 d\eta}{\int_0^1 \phi d\eta} \hat{x} \frac{d\hat{u}_{x1}}{d\hat{x}} + \left(\frac{\int_0^1 \phi^3 d\eta}{\int_0^1 \phi d\eta} - 1 \right) \hat{u}_{x1} \right\} \dots (23)$$

として得た第 1 近似解 (Stokes 近似) $\hat{u}_x$, $\hat{\delta}$ を用

$$F_1(\hat{x}) = \frac{A}{6} \sin\theta \cdot (3 \tan\theta \cdot \hat{x})^{1/3} \dots (24)$$

様になる。次に、 $F_1(\hat{x})$ を E_g.21 の $F(\hat{x})$ に代入して得た

第 2 近似解を用いて評価した $F(\hat{x})$ を $F_2(\hat{x})$ とする。以

下順次同様の操作を行なえば $F_i(\hat{x})$ は E_g.25 で与えられ

$$F_i = F_1 \left\{ (1 - F_{i-1})^{2/3} - \frac{4}{5} (1 - F_{i-1})^{1/3} \hat{x} \frac{dF_{i-1}}{d\hat{x}} \right\} \dots (25)$$

る。 $i \rightarrow \infty$ で $F_i \rightarrow F$ である事と、 $\hat{x} (dF_i/d\hat{x}) = F_i/3$

である事を考慮すると、 $F(\hat{x})$ は E_g.26 で近似される。

$$F(\hat{x}) \approx \frac{A}{6} \sin\theta (3 \tan\theta \hat{x})^{1/3} - \frac{14}{15} \left[\frac{A}{6} \sin\theta (3 \tan\theta \hat{x})^{1/3} \right]^2 \dots (26)$$

求わる $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{\delta}$ は $F(\hat{x})$ を用いて次のごとくなる。

$$\hat{u}_x = \frac{1}{2} \cos\theta (3 \tan\theta \hat{x})^{2/3} (1 - F)^{1/3} \eta (2 - \eta) \dots (27)$$

$$\hat{u}_y = -\frac{1}{2} \sin\theta \cdot \eta^2 \dots (28)$$

$$\hat{\delta} = (3 \tan\theta \cdot \hat{x})^{1/3} (1 - F)^{-1/3} \dots (29)$$

4. 計算結果

Figs. 2, 3 に $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ の η 分

布と界面速度 $\hat{u}_{x1}$, $\hat{u}_{y1}$ を、Fig.4 に $\hat{\delta}$ の $\hat{x}$ 分布を示す。

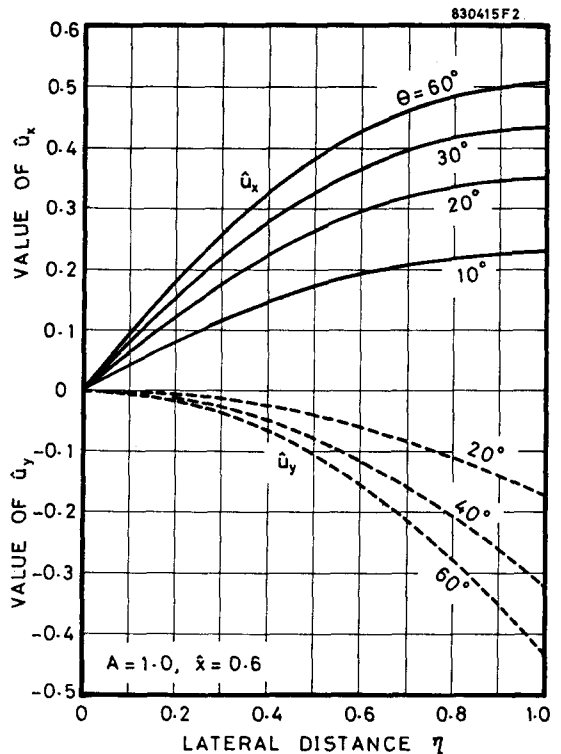


FIG. 2.-VELOCITY DISTRIBUTION

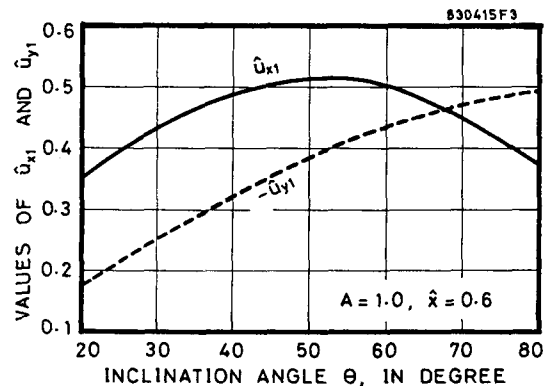


FIG. 3.-INTERFACE VELOCITY

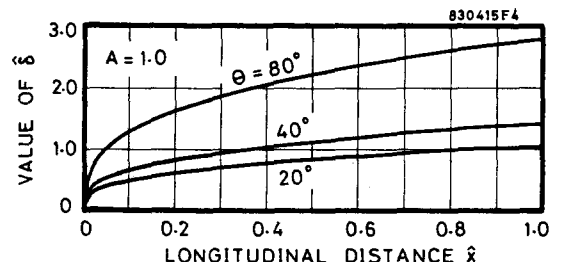


FIG. 4.-CLEAR LAYER THICKNESS