

九州産業大学 正員○加納正道
東 和 大学 正員 空閑幸雄
九州産業大学 正員 赤坂順三
九州産業大学 学生員 西村顕治

1・まえがき 流流速および拡散係数が空間的に変化する場において移流分散方程式により汚濁物質等の拡散現象を解析する場合には解析結果の精度に流速、拡散係数、空間格子幅(Δx) および時間格子幅(Δt)が影響して、既存のD. A. Bella差分法¹⁾、Crank-Nicolson差分法²⁾等では $\Delta x^2 \sim \Delta t^2$ の誤差を生じる。³⁾ また、FEMによる移流分散方程式解析は研究途上で精度についての吟味は不十分な段階である。我々は、移流分散方程式の解析にあたって、その線型性を利用した重合法により多項式になおしこの多項式を共通に満たす差分式を作成し、この差分式により精度の高い計算結果を得ることを試みた。

2・基礎式の高度近似差分式 我々が解析の対象とするのは3次元あるいは平面2次元場における汚濁物質の移流分散現象であるが、いま記述を簡単にするために / $\frac{\partial(CA)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial CA}{\partial x}) - \frac{\partial(CAV)}{\partial x} + N \dots (1)$ 次元で表わせば式(1)がえられる。ここに、C:濃度、V:流速、 $\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - (V - \frac{\partial K}{\partial x}) \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} C + N \dots (2)$ K:拡散係数、N:非保存項。式(1)より式(2)となり、さらにV- $\frac{\partial K}{\partial x} = V$ 、 $-\frac{\partial V}{\partial x} = M$ で置きかえると式(3)となる。つぎに、 $\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} + MC + N \dots (3)$ 式(3)を多項式で近似し x^4 を含む項まで求めると式(4)のように無限級数となる。

$$\left. \begin{aligned} C^{(0)}(x,t) &= 1 + (M+N)t + \frac{1}{2} M(M+N)t^2 + \frac{1}{6} M^2(M+N)t^3 + \frac{1}{24} M^3(M+N)t^4 + \dots, & C^{(1)}(x,t) &= x + (MX - Vt + N)t \\ &+ \frac{1}{2} M(MX - 2Vt + N)t^2 + \frac{1}{6} M^2(MX - 3Vt + N)t^3 + \frac{1}{24} M^3(MX - 4Vt + N)t^4 + \dots, & C^{(2)}(x,t) &= x^2 + (MX^2 - 2Vx + 2KN)t \\ &+ \frac{1}{2} (M^2X^2 - 4VMx + 2V^2 + 4KM + MN)t^2 + \frac{1}{6} (M^3X^2 - 6VM^2x + 6V^2M + 6KM^2 + M^2N)t^3 + \frac{1}{24} (M^4X^2 - 8VM^3x + 12V^2M^2 + 8KM^3 + M^2N)t^4 \\ &+ \dots, & C^{(3)}(x,t) &= x^3 + (MX^3 - 3Vx^2 + 6Kx + N)t + \frac{1}{2} (M^2X^3 - 6VMx^2 + 6V^2x + 12KMx - 12KV + MN)t^2 + \frac{1}{6} (M^3X^3 - 9VM^2x^2 \\ &+ 18V^2MX + 18KM^2x - 6V^3 - 36KVM + M^2N)t^3 + \frac{1}{24} (M^4X^3 - 12VM^3x^2 + 36V^2M^2x + 24KM^3x - 24V^3M - 72KVM^2 + M^3N)t^4 + \dots, \\ C^{(4)}(x,t) &= x^4 + (MX^4 - 4Vx^3 + 12Kx^2 + N)t + \frac{1}{2} (M^2X^4 - 8VMx^3 + 12V^2x^2 + 24KMx^2 - 48KVx + 24K^2 + MN)t^2 + \frac{1}{6} (M^3X^4 - 12VM^2x^3 \\ &+ 36V^2MX^2 + 36KM^2x^2 - 144KVMx - 24V^3x + 72KV^2 + 72K^2M + M^2N)t^3 + \frac{1}{24} (M^4X^4 - 16VM^3x^3 + 72V^2M^2x^2 + 48KM^3x^2 - 96V^3MX \\ &- 288KVM^2x + 216KV^2M + 144K^2V^2M + 144K^2M^2 + 24V^4 + M^3N)t^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

つぎに、 $\Delta x = \alpha h, \Delta t = h^2$ として $(\Delta x)^4$ 程度の精度で高度近似差分式を求めよう。式(3)の近似解として式(4)の5個の式を考え、差分式に5個の未定係数をもたせて図-1/1、図-1/2、図-1/3に示す6点で差分をとる。即ち、式(5・1)、

(5・2)、(5・3)をうる。

ここに、 $C(i \cdot \Delta x, k \cdot \Delta x) = C(i, k)$ 。また、 $P_{-1}^{-1}, Q_{-1}^{-1}, R_{-1}^{-1} \dots$ は未定係数。

式(3)において非保存項無視でき、定数係数である場合に、

$$C(i, k) = Q_{-1}^{-1} C(i-1, k-1) + Q_{-1}^{-1} C(i-1, k) + Q_{-1}^{-1} C(i, k-1) + Q_{-1}^{-1} C(i, k+1) + Q_{-1}^{-1} C(i+1, k-1) + Q_{-1}^{-1} C(i+1, k) \dots (5 \cdot 1)$$

$$C(i, k) = P_{-1}^{-1} C(i-1, k-1) + P_{-1}^{-1} C(i-1, k) + P_{-1}^{-1} C(i, k-1) + P_{-1}^{-1} C(i, k+1) + P_{-1}^{-1} C(i+1, k-1) + P_{-1}^{-1} C(i+1, k) \dots (5 \cdot 2)$$

$$C(i, k) = R_{-1}^{-1} C(i-1, k-1) + R_{-1}^{-1} C(i+1, k-1) + R_{-1}^{-1} C(i, k-1) + R_{-1}^{-1} C(i, k+1) + R_{-1}^{-1} C(i+1, k-1) + R_{-1}^{-1} C(i+1, k) \dots (5 \cdot 3)$$

差分式(5・1)～(5・3)の未定係数を求めるには式(4)のすべての多項式が式(5・1)～(5・3)をそれぞれ満足するように作成した連立方程式(6・1)～(6・3)を解けばよい。但し、式(6・1)～(6・3)中の $A_0 \sim B_{41}$ は式(7)に示すものである。

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} A_0 & 1 & A_0 & A_{01} & 1 & \\ A_1 + B_1 & -\alpha h & A_1 & A_{11} & \alpha h & \\ A_2 + B_2 + D_2 & \alpha^2 h^2 & A_2 & A_{21} & \alpha^2 h^2 & \\ A_3 + B_3 + D_3 & -\alpha^3 h^3 & A_3 & A_{31} & \alpha^3 h^3 & \\ A_4 + B_4 + D_4 & \alpha^4 h^4 & A_4 & A_{41} & \alpha^4 h^4 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Q_{-1}^{-1} \\ Q_{-1}^{-1} \\ Q_{-1}^{-1} \\ Q_{-1}^{-1} \\ Q_{-1}^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot (6 \cdot 1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} A_0 & 1 & A_0 & A_0 & 1 & \\ A_1 + B_1 & -\alpha h & A_1 & A_1 - B_1 & \alpha h & \\ A_2 + B_2 + D_2 & \alpha^2 h^2 & A_2 & A_2 + B_2 - D_2 & \alpha^2 h^2 & \\ A_3 + B_3 + D_3 & -\alpha^3 h^3 & A_3 & A_3 - B_3 + D_3 & \alpha^3 h^3 & \\ A_4 + B_4 + D_4 & \alpha^4 h^4 & A_4 & A_4 + B_4 - D_4 & \alpha^4 h^4 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} P_{-1}^{-1} \\ P_{-1}^{-1} \\ P_{-1}^{-1} \\ P_{-1}^{-1} \\ P_{-1}^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot (6 \cdot 2)$$

3・厳密解および他の差分解との比較 式(1)で流速および拡散係数一定で保存系とみなした場合に、初期条件 $C(x, 0) = \text{EXP}((-x + Vt) / \sqrt{K})$ 、境界条件 $C(x = Vt, t) = \text{EXP}(t)$ を満足する厳密解の一つは

$C = \text{EXP}(-x / \sqrt{K} + (1 + V / \sqrt{K}) t) \cdots (8)$ となる³⁾。式(8)の厳密解と式(5・1), (5・2), (5・3)の高度近似差分式、D・A・Bellaの差分式¹⁾およびCrank—Nicolsonの差分式²⁾の計算結果を相対誤差(ϵ で示す)で比較して表— / および図—2~図—5に示す。我々が提案する高度近似差分式の三種類を組合せて使用すれば、かなり広い流速および拡散係数の範囲で既存の差分法では得難い $(\Delta x)^4$ を満足する精度の高い解がえられる。

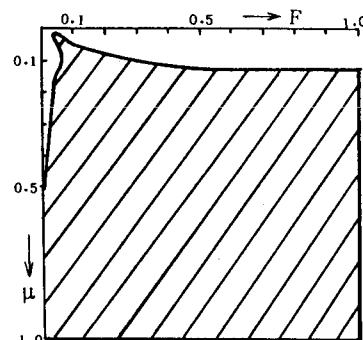
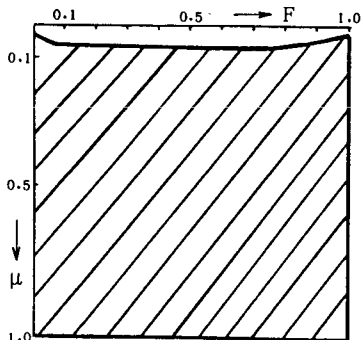
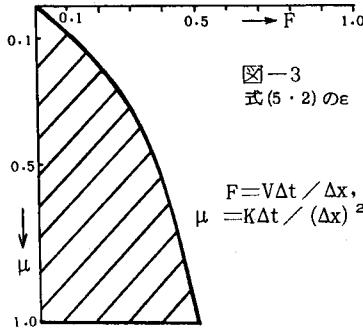
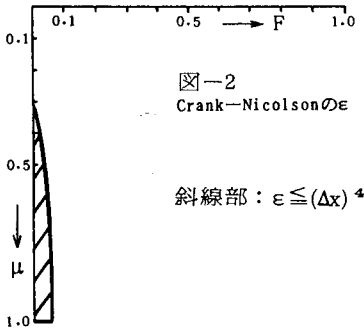
$$\begin{Bmatrix} B_{01} & 1 & A_0 & A_0 & 1 \\ B_{11} & -\alpha h & A_1 & A_1 - B_1 & \alpha h \\ B_{21} & \alpha^2 h^2 & A_2 & A_2 - B_2 + D_2 & \alpha^2 h^2 \\ B_{31} & -\alpha^3 h^3 & A_3 & A_3 - B_3 + D_3 & \alpha^3 h^3 \\ B_{41} & \alpha^4 h^4 & A_4 & A_4 - B_4 + D_4 & \alpha^4 h^4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R^{-\frac{1}{2}} \\ R^{-\frac{1}{2}} \\ R^{-\frac{1}{2}} \\ R^{-\frac{1}{2}} \\ R^{-\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6 \cdot 3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - (M+N)h^2 + \frac{1}{2}M(M+N)h^4 - \frac{1}{6}M^2(M+N)h^6, \\ A_1 &= Vh^2 - Nh^2 - MVh^4 + \frac{1}{2}M^2Nh^4 + \frac{1}{2}M^2Vh^6 \\ &\quad - \frac{1}{6}M^2Nh^6, \\ B_1 &= -\alpha h + Mah^3 - \frac{1}{2}M^2\alpha h^5 + \frac{1}{6}M^3\alpha h^7, \\ A_2 &= -2Kh^2 - Nh^2 + V^2h^4 + 2KMh^4 + \frac{1}{2}M^2Nh^4 \\ &\quad - V^2Mh^6 - M^2Kh^6 - \frac{1}{6}M^2Nh^6, \\ B_2 &= \alpha^2 h^2 - Ma^2h^4 + \frac{1}{2}M^2\alpha^2 h^6 - \frac{1}{6}M^3\alpha^2 h^8, \\ D_2 &= -2V\alpha h^3 + 2MV\alpha h^5 - M^2V\alpha h^7, \\ A_3 &= -Nh^2 - 6KVh^4 + \frac{1}{2}M^2Nh^4 + V^3h^6 + 6KVMh^6 - \frac{1}{6}M^2Nh^6, \\ B_3 &= -\alpha^3 h^3 + 6K\alpha h^3 + Ma^3h^5 - \frac{1}{2}M^2\alpha^3 h^7 \\ &\quad - 3V^2\alpha h^5 - 6KM\alpha h^5 + \frac{1}{6}M^3\alpha^3 h^9 + 3V^2Ma^3h^7 + 3KM^2\alpha h^7, \\ D_3 &= 3V\alpha^2 h^4 - 3VM\alpha^2 h^6 + \frac{3}{2}VM^2\alpha^2 h^8, \\ A_4 &= -Nh^2 + 12K^2h^4 + \frac{1}{2}M^2Nh^4 - 12KV^2h^6 - 12K^2Mh^6 - \frac{1}{6}M^2Nh^6, \\ B_4 &= \alpha^4 h^4 - Ma^4h^6 - 12K\alpha^2 h^4 \\ &\quad + \frac{1}{2}M^2\alpha^4 h^8 + 6V^2\alpha^2 h^6 + 12KM\alpha^2 h^6 - \frac{1}{6}M^3\alpha^4 h^{10} - 6V^2Ma^2 h^8 - 6KM^2\alpha^2 h^8, \\ D_4 &= -4V\alpha^3 h^5 + 4VM\alpha^3 h^7 \\ &\quad + 24KV\alpha h^5 - 2VM^2\alpha^3 h^9 - 24KVM\alpha h^7 - 4V^3\alpha h^7, \\ A_{01} &= 1 - 2(M+N)h^2 + 2M(M+N)h^4 - \frac{1}{2}M^2(M+N)h^6, \\ A_{11} &= -\alpha h - 2(-M\alpha h - V+N)h^2 + 2M(-M\alpha h - 2V+N)h^4 - \frac{1}{2}M^2(-M\alpha h - 3V+N)h^6, \\ A_{21} &= \alpha^2 h^2 - 2(M\alpha^2 h^2 + 2V\alpha h + 2K + N)h^2 + 2(M^2\alpha^2 h^2 + 4VM\alpha h + 2V^2 + 4KM + MN)h^4 - \frac{1}{2}(M^3\alpha^2 h^2 + 6VM^2\alpha h + 6V^2M + 6KM^2 + M^2N)h^6, \\ A_{31} &= -\alpha^3 h^3 - 2(-M\alpha^3 h^3 - 3V\alpha^2 h^2 - 6K\alpha h + N)h^2 + 2(-M^2\alpha^3 h^3 - 6VM\alpha^2 h^2 - 6V^2\alpha h - 12KM\alpha h - 12KV + MN)h^4 - \frac{1}{2}(-M^3\alpha^3 h^3 - 9VM^2\alpha^2 h^2 - 18V^2M\alpha h - 18KM^2\alpha h - 6V^3 - 36KVM + M^2N)h^6, \\ A_{41} &= \alpha^4 h^4 - 2(M\alpha^4 h^4 + 4V\alpha^3 h^3 + 12K\alpha^2 h^2 + N)h^2 + 2(M^2\alpha^4 h^4 + 12VM\alpha^3 h^3 + 36V^2\alpha^2 h^2 + 36KM\alpha^2 h^2 + 144KVM\alpha h + 24V^3\alpha h + 72KV^2 + 72KM^2 + M^2N)h^6, \\ B_{01} &= 1 - 2(M+N)h^2 + 2M(M+N)h^4 - \frac{1}{2}M^2(M+N)h^6, \\ B_{11} &= \alpha h - 2(M\alpha h - V+N)h^2 + 2M(M\alpha h - 2V+N)h^4 - \frac{1}{2}M^2(M\alpha h - 3V+N)h^6, \\ B_{21} &= \alpha^2 h^2 - 2(M\alpha^2 h^2 - 2V\alpha h + 2K + N)h^2 + 2(M^2\alpha^2 h^2 - 4VM\alpha h + 2V^2 + 4KM + MN)h^4 - \frac{1}{2}(M^3\alpha^2 h^2 - 6VM^2\alpha h + 6V^2M + 6KM^2 + M^2N)h^6, \\ B_{31} &= \alpha^3 h^3 - 2(M\alpha^3 h^3 - 3V\alpha^2 h^2 + 6K\alpha h + N)h^2 + 2(M^2\alpha^3 h^3 - 6VM\alpha^2 h^2 + 6V^2\alpha h + 12KM\alpha h - 12KV + MN)h^4 - \frac{1}{2}(M^3\alpha^3 h^3 - 9VM^2\alpha^2 h^2 + 18V^2M\alpha h + 18KM^2\alpha h - 6V^3 - 36KVM + M^2N)h^6, \\ B_{41} &= \alpha^4 h^4 - 2(M\alpha^4 h^4 - 4V\alpha^3 h^3 + 12K\alpha^2 h^2 + N)h^2 + 2(M^2\alpha^4 h^4 - 8VM\alpha^3 h^3 + 12V^2\alpha^2 h^2 + 24KM\alpha^2 h^2 - 48KVM\alpha h + 24K^2 + MN)h^4 - \frac{1}{2}(M^3\alpha^4 h^4 - 12VM^2\alpha^3 h^3 + 36V^2M\alpha^2 h^2 + 36KM^2\alpha^2 h^2 - 144KVM\alpha h - 24V^3\alpha h + 72KV^2 + 72KM^2 + M^2N)h^6 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

表—1

ϵ = 相対誤差

T	X	Bella	Crank-Nicolson	式(5・1)	式(5・2)	式(5・3)	厳密解
5 Δt	5 Δx	1.6E-02	2.7E-03	7.8E-05	3.0E-05	4.6E-05	0.227638E-00
	40 Δx	1.6E-02	2.7E-03	8.0E-05	3.0E-05	4.6E-05	0.282383E-06
40 Δt	5 Δx	9.3E-02	1.6E-02	9.7E-04	3.1E-04	2.0E-04	0.189287E-06
	40 Δx	1.7	2.7E-03	1.2E-03	3.8E-04	4.5E-04	0.806953E-06



4・むすび 高度近似差分式により目的とする精度 $(\Delta x)^4$ を満たす / 次元移流分散方程式の解がえられる。今後、拡散水理模型あるいは実際の水域の拡散問題への適用について検討していきたい。

参考文献

- 1) 加納、崎山：湾域における汚濁物質の解析について、土木学会第四回環境問題シンポジウム講演集 / 976
- 2) 戸川：微分方程式の数値計算、オーム社
- 3) 空閑、加納、赤坂：高度近似差分式による拡散方程式の数値解析、昭和57年度西部支部年講