II-246　マイコンによる管網計算の厳密解について

福井工大　正員　○和田久範
同　正員　吉田豊穂

1. はじめに

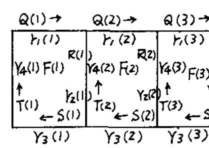
管網計算は流量を未知数とする流量法と、節点エネルギーを未知数とする節点エネルギー位法に大別される。前者については代表的なハーデイクロス法があり、その改良法は今日でも多用されている。後者については節点水位が直接求められることから応用面が広く、計画設計上の問題を取扱うのに便利である。本稿では流量法についてマイコンによる厳密解の1試案を報告する。なお管網計算にはやや複雑な面もあるのでこれを簡易化し、かつマイコンを有効に利用する目的から、従来の方法に拘束されず、新しい記号を用い、できるだけ機能的に処理する手法を提案する。

2. 計算法

管網計算に関する詳細な解析は、高桑氏らの研究に依存するものとし、ここでは計算処理上の問題点についてのみ簡略に記述する。簡網計算では、摩擦以外の局所損失を無視し得る場合の損失水頭hと、流量Qとの関係は次式で与えられる。　$h=rQ^m$ これに流れの方向を規定すると $h=rQ|Q|^{m-1}$ となる。mとrをマニング式で表現すると、$h=rQ^2$　$r=10.294\,n^2 l/d^{\frac{16}{3}}$　n：粗度計数　l：管路長　d＝管径

流量法の基礎方程式は　(1)各節点に接続する管路の流入と流出が等しいとする節点方程式　$\sum Q=0$
(2)各要素閉回路について、損失水頭の代数和を0とする閉回路方程式　$\sum h=0$

ただし、節点方程式で各管路の流量を表示できるように未知数を定めておけば、閉回路の連立方程式のみによって流量を計算することができる。この手順を具体的に説明すると次のようになる。



(1) 管路の流量記号を図のように統一し、要素閉回路毎に右廻りを＋にとり
$Q(i)\to R(i)\to S(i)\to T(i)$ ………… によって閉回路を構成する。

(2) 未知数は各閉回路毎に$Q(i)$, $R(i)$, $S(i)$, $T(i)$----の中から1箇を選ぶ。
但し隣接回路の未知数と重複しないようにする。これにより未知数の数は方程式の数に一致する。今回の計算ではすべての回路の$Q(i)$を未知数とした。その場合、$R(i)$, $S(i)$, $T(i)$……は$Q(i)$の関数で表わされる。

(3) 閉回路方程式を要素閉回路毎につくると次のように表示される。（別の方法もある）

$$F(i)=r_1(i)\,Q(i)\,|Q(i)|^{m-1}+r_2(i)\,R(i)\,|R(i)|^{m-1}+r_3(i)\,S(i)\,|S(i)|^{m-1}+r_4(i)\,T(i)\,|T(i)|^{m-1}\cdots\cdots$$

この方程式は流量方向が変化しても符号を変える必要はないので、機能的に処理できる。

以上により連立方程式は作成された。しかしこの方程式は非線型であるため、直接数学的に解くことはできない。従ってこれを如何に処理するかにより、管網計算の精度が変わるので重要な問題になる。この方程式の近似解法には、ニュートン法が最もよく用いられており、初期値の与え方に注意すれば収束することが多い。同時にニュートン法より精度の高い解法として厳密解法が用いられているが、収束の可能性についてはニュートン法の方がよいように思う。ここで両解法の利用法について検討することにしよう。

$f(x)=0$において $f(x)$ を x_i の近傍でテーラ展開すると $f(x)=f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{1}{2}f''(x_i)(x-x_i)^2\cdots\cdots$
この式の1次微分項までをとって近似するのがニュートン法で $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ となり、これが多変数の連立方程式ではヤコビアン行列によって補正値が計算される。　$x_{i+1}=x_i-[J(x_i)]^{-1}f(x_i)$

厳密解法と言われる方法は、テーラー展開の２次微分項までをとるものであり、青木氏、高桑氏らによってその計算法が示されている。またベイリー法では理論的には３次の収束をすることになっているが、実際には成功していない。両者を比較すると前者の方がよいと思われるが、なお研究の余地がある。筆者は別の考え方から次の方法を提案したい。この方法は一松法と言われ、単独方程式の解法に用いられるもので、テーラ展開の２次微分項までをとって補正値の２次方程式をつくり、その根によって計算するもので理論的である。この手法を連立方

程式に拡張することが可能である。さて一松式は条件付の式、(a),(b),(c)で表わされる。

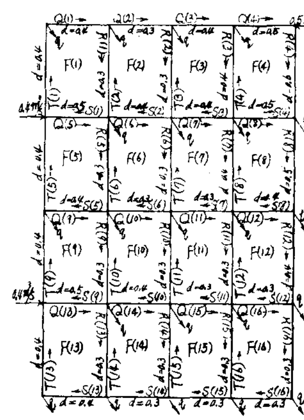
$$D = f'(x) - 2f(x)f''(x) \quad D<0 \ : \ \varepsilon = -\frac{f'(x)}{f''(x)} \quad \text{-------}(a)$$

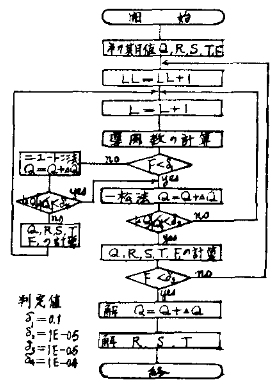
$$D \geqq 0 \text{ かつ } f'(x) \geqq 0 \ : \ \varepsilon = \frac{2f(x)}{-f'(x)-\sqrt{D}} \quad \text{-----}(b)$$

$$D \geqq 0 \text{ かつ } f'(x) < 0 \ : \ \varepsilon = \frac{2f(x)}{-f'(x)+\sqrt{D}} \quad \text{-----}(c)$$

(a).(b).(c)の各式をニュートン法の補正値 $\varepsilon = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ の $f'(x)$に対応させると(a)式より $f(x)+\sqrt{D}$, (b)式より $f(x)-\sqrt{D}$が得られる。但し(c)式の場合はやや無理があるので、この分はニュートン法を用いることにしてヤコビ行列をつくった。このように一松法にニュートン法を部分的に導入した計算法を用いて厳密計算を行うことにより、解の精度を高めることができる。この両者の特色は、テーラ展開の1次項までをとるニュートン法の方が、当然2次項までをとる一松法より広い収束性を有するわけであり、また精度の上からは、逆に一松法の方がニュートン法よりすぐれることになる。従って両者を併用して計算をすすめるときは、最初の部分はニュートン法を用い、終りの部分に一松法を用いるようにすれば効果的である。次に25節点の計算例をあげたが、初期値の設定は、16変数のすべてを同一に、$Q(i)=0.05$ としたにもかかわらず、ニュートン法5回の後、一松法7回で厳密解を得た。なおニュートン法には時間を要するが、コンプリートピボッティング法による方がよい結果になる。

計算例





(解)

Q(1)= .0325665	Q(9)= .0863723
Q(2)=-4.48732 E-03	Q(10)= .0478833
Q(3)=-.0824311	Q(11)= 2.11881 E-03
Q(4)=-.212429	Q(12)=-.813085
Q(5)= .209206	Q(13)= .21938
Q(6)= .0881904	Q(14)= .12329
Q(7)= 4.21449 E-03	Q(15)= .0510939
Q(8)=-.0760754	Q(16)= 5.60271E-04

3、おわりに

コンピュータによる計算は正確であるが、安全を期するためには解の点検が必要である。例えばマニング式は $h=rQ^2$ の連立2次方程式になるから解が2組になる。これを $h=rQ|Q|$ とすれば解は1組である。このことから、後者の解によって得られた解の係数符号を前者の式に用いた方程式を解くことにより、両式に共通の解が1組あることがわかる。この方法により解の点検をすることができる。大型の管網計算の収束判定に $F(i)$ の残差を用いる場合、判定値の取り方によって解に相当の差を生ずることがある。従って判定値を小さく取り得る解法を厳密解に用いなければならない。一松法は解の近傍で正確な値を与えることになるので、厳密解に適すると思う。マイコンによる管網計算は、50節点ぐらいまでは可能であるが、正確を期するにはさきに述べた点検法、または別の解法によって点検するのがよいと思う。以上述べたところを結論すると、

(1) 管網計算の記号化によって、複雑な解析が簡易化され、機能的な計算ができること、

(2) 一松法とニュートン法の特色を取り入れた解法によって、厳密解が可能になったことがあげられる。なおこの手法は流量法のほかにも応用できる。

〔参考文献〕

(1) 青木康夫： 管網計算の連立2次方程式による厳密解法 水道協会雑誌 第350号

(2) 高桑哲男： 開管路方程式による配水管網の解析 同 第485号

(3) 〃 配水管網の解析と設計（森北出版）

(4) 一松 信・森口繁一・山内二郎 ： 電子計算機のための数値計算法1、一松信 ： 2次の近似式について、第3回プログラムシンポジウム報告集

(5) 第6回電算機利用に関するシンポジウム「非線型連立方程式におけるニュートン法拡張の試み」 及び 第7回「非線型連立方程式による管網計算のマイコン利用について」土木学会