

九州大学工学部 正員 栗谷陽一
九州工業大学 正員 ○藤崎一裕

1. まえがき

水平に設置された円管内の流れにおける沈降性粒子の平均流速、分散係数、横断面内の挙動などについて調べた。解析の手法としては、まず流下方向に濃度勾配のない場合の解を基本解とし、この基本解に濃度勾配の影響と線形の補正項として加えるという従来からの手法によった。また、管路底部には粒子の沈積がない場合を対象とし、基礎式の数値解は有限要素法を用いて求めた。

2. 基礎式

図1のように流下方向に x 軸、管の横断面内の水平方向に z 軸、鉛直方向に y 軸ととり、管半径 a 、粒子濃度 C 、粒子沈降速度 w 、 x 方向流速 u 、拡散係数 D とすると、この場合の粒子保存の式と境界条件はそれぞれ(1)、(2)式で示される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}C) = \frac{\partial}{\partial y}(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial y}) + W C + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial z}) \quad (1)$$

$$\bar{D} \frac{\partial C}{\partial n} + l_y W C = 0; \quad \bar{r} = (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^{1/2} = 1 \quad (2)$$

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \bar{u} = u/u_*, \quad \bar{D} = D/au_* \quad (3)$$

$$\bar{t} = t/(a/u_*), \quad W = w/u_*$$

$$\partial/\partial n = l_y \partial/\partial y + l_z \partial/\partial z \quad (4)$$

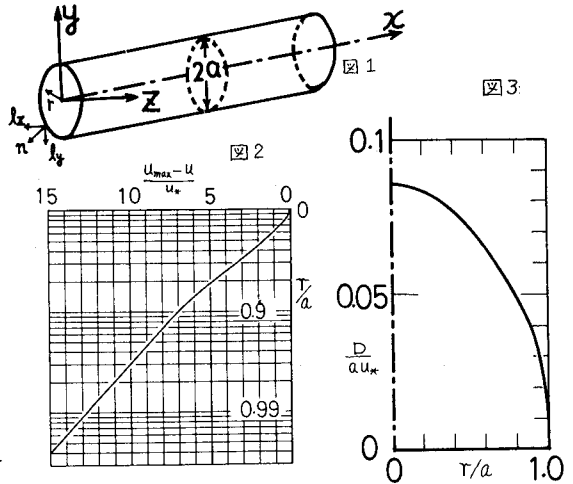
l_x, l_y は円管壁境界における外向単位法線方向の余弦である。上式において、拡散係数には等方性を仮定し、粒子の拡散係数と溶剤拡散係数とを等しいとした。 u および D の値は、Taylorが中立性物質の解析に使用した値と利用する(図2、図3)

濃度 C に関しては、 x 方向の変化が小さい場合を想定して、移動座標 s で展開して1次の項までとり、次の式で表す

$$C = \bar{C}(1 + Kx_s) + \hat{C} \quad (5)$$

K は x 方向濃度勾配に関連した一定値とし、 $\bar{C}$ および $\hat{C}$ は、(2)式を満足し、かつそれぞれ(6)、(7)式の解とする

$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}) + W \bar{C} = 0 \quad (6)$$



$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{D} \frac{\partial \hat{C}}{\partial y}) + W \hat{C} = K \hat{u}_s \bar{C} \quad (7)$$

$$\hat{u}_s = \bar{u} - \bar{u}_s \quad (8)$$

$$\bar{u}_s = \iint \bar{C} \bar{u} d\bar{y} d\bar{z} / \iint \bar{C} d\bar{y} d\bar{z} \quad (9)$$

$$x_s = x - \bar{u}_s \bar{t} \quad (10)$$

とし、(5) ~ (9)式を考慮して、(1)式を管断面で積分すると次式がえられる

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \bar{u}_s \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = \bar{D}_s \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} = \bar{D}_s \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x_s^2} \quad (11)$$

$$-\bar{D}_s \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = -\frac{D_s}{au_*} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = \langle \hat{u}_s \hat{C} \rangle \quad (12)$$

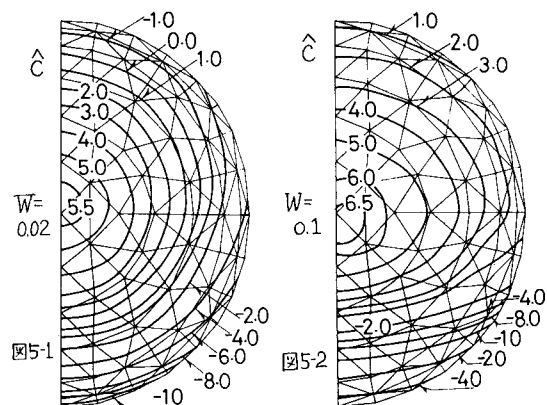
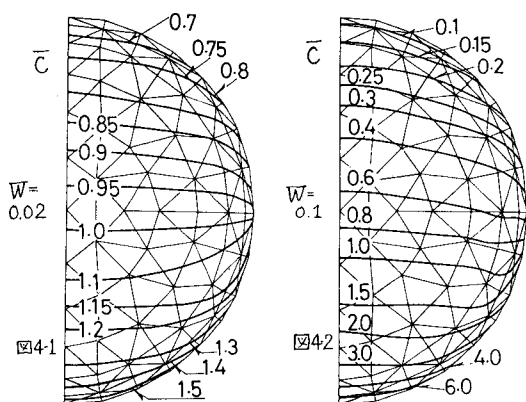
$\langle \rangle$ は管全断面にわたる積分を意味する。以上のことから、(9)、(12)を用いてそれぞれ粒子の平均移流速度および分散係数 $\bar{D}_s$ が求められる

(2)式を満たす(6)、(7)式の数値計算には Galerkin の有限要素法を用いた。各変量を近似関数 ϕ 、 ψ を用いて次のように近似する

$$\bar{C} = \phi_p \bar{C}_p, \quad \hat{C} = \phi_q \hat{C}_q, \quad \hat{u}_s = \phi_u \hat{u}_s, \quad \bar{D} = \phi_D \bar{D} \quad (13)$$

上式を(6)式に代入して、これを離散化すると

$$\sum_p \left[\bar{C}_p \left\{ \iint \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial y} \psi_q \bar{D} \frac{\partial \phi_q}{\partial y} + \phi_q W \frac{\partial \phi_p}{\partial y} + \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \psi_q \bar{D} \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right) d\bar{y} d\bar{z} \right\} \right] - \bar{C}_p \left\{ \int \phi_p \left(\psi_q \bar{D} \frac{\partial \phi_q}{\partial y} + \phi_q W \right) l_y ds + \int \phi_p \psi_q \bar{D} \frac{\partial \phi_q}{\partial z} l_z ds \right\} = 0 \quad (14)$$



がえられる。Γは管壁と、 $Z=0$ の対称面からなる。要素の形状は三角形とし、近似関数として中には6節点、2次、 ψ には3節点、1次関数を用いた。 $\hat{C}$ についても同様にして、類似の式が導かれる

3 計算結果と考察

図4、図5にそれぞれ $\bar{C}$ および $\hat{C}$ の計算結果の例を示す。図6および図7はそれぞれ粒子のflux $\vec{J}$ および移動速度 $\vec{V}_s$ を示す。

$$\vec{J} = -\bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + W \bar{C} \vec{e} - \bar{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}, \quad \vec{V}_s = \vec{J} / \bar{C} \quad (15)$$

である。図4はクラウド中心部における濃度分布に対応する。また、図6、図7からは管内における粒子の二次流的な挙動を知ることができる。 $W=0.1$ の方が $W=0.02$ の方に比べて、相対的に沈降の影響が強いので、管内底部での粒子濃度も高く、 $\vec{J}$ 、 $\vec{V}_s$ の値も大きく出ている。

図8および図9に W と $\bar{U}_s$ との関係、 W と $\bar{D}_L$ との関係を示す。図中の破線は開水路流れの場合の値を示す。なお、数値計算では半径の99.5%以内をFEMにより計算し、それより管壁側では解析的に漸近解を求めて接続した。この手法で求めた $W=0$ における $\bar{D}_L=10.2$ (Taylor¹⁾の解析解は10.06)であった。

最後に、この研究を進めるにあたり種々協力いただいた、九州工大南谷土木科の小幡茂香技術補佐員と同大学院生の大浦芳弘君に感謝する。

参考文献

- 1) Taylor, G.I., J. Fluid Mech., vol. 233, pp. 466~488, 1954
- 2) Sumer, B.J., J. Fluid Mech., vol. 65, Part. 1, pp. 11~18, 1974

