

岡山県 正員 西本 靖
神戸大学工学部 正員 篁 源亮

1. まえがき 成層密度流界面に有限振幅の内部波が存在する場合の界面現象を線形化した方程式で表現することは適切ではない。そこで本研究では、図-1 に示す密度流モデルについて界面における非線形性を考慮し、内部波の挙動を摂動法を用いて理論的に取扱う。

2. 支配方程式 対象とする流体を非拡散、非圧縮性完全流体とし、流れは2次元とする。また座標系、上下両層に関する諸量は、図-1 のごとく定め、下層、上層の流速分布は $\bar{u}_j = \bar{u}_{j0} + a_j x_2$ を無次元化し次式で与える。

$$U_j(y) = U_{j0} + \alpha_j y \quad j=1, 2 \quad (1)$$

ここで流速の変動成分において渦度が存在しないものとする、流れの変動成分を支配する無次元運動方程式、 $y \rightarrow \pm\infty$ における境界条件式、内部境界面における境界条件式は無次元流れ関数 ψ_j を用いて次式で表される。

$$\nabla^2 \psi_j = 0 \quad j=1, 2 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} j=1 & (y \rightarrow -\infty) \\ j=2 & (y \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (3)$$

$$L\psi + N\psi = 0 \quad (y=0) \quad (4)$$

ここに $L\psi, N\psi$ はそれぞれ内部境界面における境界条件式の線形成分、非線形成分を表す。また ψ は内部波形を η として $\psi = (\psi_1, \psi_2, \eta)^T$ で表されるものとする。ただし添字 t は転置を表す。

3. 線形安定な波数領域における内部波について Nayfeh & Saric²⁾を参照し、内部波形 η 及び流れ関数 ψ_j を微小無次元パラメーター ε を用いて摂動展開する。ただし T_2 は $T_2 = \varepsilon^2 t$ で定義される時間尺度であり、 θ は $\theta_x = k(T_2), \theta_t = -\omega(T_2)$ の関係を満たす位相である。

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n(\theta, T_2) + O(\varepsilon^4), \quad \psi_j(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_{jn}(\theta, T_2, y) + O(\varepsilon^4) \quad (5)$$

(5) 式を (2)~(4) 式に代入し ε に関して整理すると ε の各オーダーについて支配方程式を得る。この支配方程式より 1次の解(線形解)、2次の解は決定され内部波形は次式となる。

$$\eta_1 = A(T_2) \exp(i\theta) + \bar{A}(T_2) \exp(-i\theta), \quad \eta_2 = \Lambda_1 (A^2 \exp(2i\theta) + \bar{A}^2 \exp(-2i\theta)) \quad (6)$$

ただし $\bar{\cdot}$ は共役複素数を表し、 $\Lambda_1 = \Lambda_1(U_{10}, U_{20}, \alpha_1, \alpha_2, k, \omega, \rho)$ となる。また k と ω は次式を満たす。ここでは $X > 0$ の場合について考え、 $X = 0$ の場合の波数は線形中立波数であり k_c で表す。

$$\omega = \{ 2k(U_{10} + \rho U_{20}) - (\alpha_1 - \rho \alpha_2) \pm \sqrt{X} \} / 2(1 + \rho) \quad (7)$$

$$X = 4(1 + \rho)k^3 - 4\rho(U_{10} - U_{20})^2 k^2 + 4(1 - \rho^2)k + 4\rho(\alpha_1 + \alpha_2)(U_{10} - U_{20})k + (\alpha_1 - \rho \alpha_2)^2$$

3次の解は 2次までの解を 3次のオーダーの支配方程式に代入しその方程式を解くことによって決定されるが、この場合 3次の解が存在するためには次式の関係が成り立たなければならない。²⁾

$$(\Psi^*, L_0 \psi_3) = 0 \quad (8)$$

ここに L_0 はこの場合の線形演算子であり、 Ψ^* は L_0 の随伴演算子 $L_0^* \Psi^* = 0$ である。

この関係を用いると 3次の解は求まり、特に k, ω が定数の場合の内部波形は次式で与えられる。

$$\eta = \varepsilon a \cos \theta' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a^2 \Lambda_1 \cos 2\theta' + \frac{1}{4} \varepsilon^3 a^3 \Lambda_2 \cos 3\theta' + O(\varepsilon^4) \quad (9)$$

$$\theta' = kx - \omega t + J\varepsilon^2 a^2 t + \theta_0$$

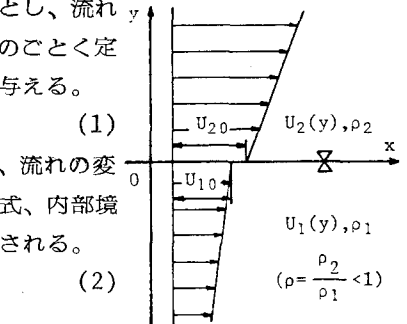


図-1 密度流モデル

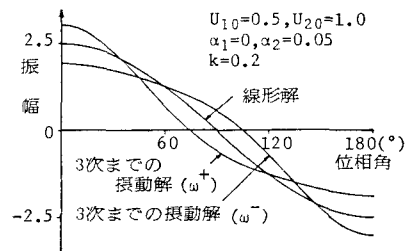


図-2 波の変形の比較

ここに a, β_0 は定数で、 $\Lambda_2 = \Lambda_2(U_{10}, U_{20}, \alpha_1, \alpha_2, k, \omega, \rho)$, $J = J(U_{10}, U_{20}, \alpha_1, \alpha_2, k, \omega, \rho)$ である。
 この場合の位相速度 c は (9) 式より $c = (\omega - J\varepsilon^2 a^2)/k$ となり位相速度が振幅に依存することを示す。
 これは基本的には Nayfeh & Saric の $a_1 = a_2 = 0$ の場合の結果と同様であることを示す。

図-2 は $U_{10} = 0.5, U_{20} = 1.0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.05, k = 0.2, \rho = 1.0005/1.0205$ に対して波高 5.0 の場合の内部波の波形を示したものである。図中の ω^+, ω^- は (7) 式の $\sqrt{X}$ の前の符号を表したもので、この図より同一の条件でも ω の取り方により波の変形に差違が見られる。

4. 線形中立波数近傍での内部波について 線形中立波数近傍における波数の展開を $k = k_c + \varepsilon^2 \sigma$ で与える。ただし k は無次元波数を表し、長さの特性量を初期正弦変動の波数 k' に対して $l = 1/k'$ とすると $1/|k'_c| = k'/k'_c = k$ である。ここに $k'_c = (\rho_1 g/T)^{1/2}$ であり、 g は重力加速度、 T は表面張力の強さである。また内部波形 η 、流れ関数 ψ_j を前節と同様に摂動展開する。

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \eta_n(X_0, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4), \quad \psi_j(x, y, t) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \psi_{jn}(X_0, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4) \quad (10)$$

ここに $X_0 = \varepsilon^0 x, T_n = \varepsilon^n t$ ($n = 0, 1, 2$) はそれぞれ位置及び時間尺度である。

(10) 式を (2) ~ (4) 式に代入し ε に関して整理すると ε の各オーダーの支配方程式を得る。この支配方程式を解くと前節と同様に 1 次及び 2 次の解は決定され、3 次の解が存在するためには (8) 式が成り立たなければならない。本節の場合、(8) 式は結局次式となる。

$$\left(\frac{\partial a}{\partial T_1}\right)^2 + \frac{\Gamma}{1+\rho} \left(\alpha^2 a^2 - \frac{1}{2} a^4\right) = C, \quad \alpha^2 = (1+\rho) \frac{\Theta}{\Gamma} \quad \left(\frac{\Theta}{\Gamma} > 0\right) \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial T_1}\right)^2 + \frac{\Gamma}{1+\rho} \left(-\beta^2 a^2 - \frac{1}{2} a^4\right) = C, \quad \beta^2 = -(1+\rho) \frac{\Theta}{\Gamma} \quad \left(\frac{\Theta}{\Gamma} < 0\right) \quad (12)$$

ここに a は実変数、 C は積分定数であり、 $\Gamma = \Gamma(U_{10}, U_{20}, \alpha_1, \alpha_2, \rho)$, $\Theta = \Theta(U_{10}, U_{20}, \alpha_1, \alpha_2, \rho)$ である。

$a(T_1, T_2)$ の挙動は位相面図より明らかにする。まず (11) 式の場合の位相面図は図-3 で与えられる。 $\Gamma > 0$ の場合は、 $C < C_0 = \Gamma \alpha^4 / 2(1+\rho)$ かつ軌跡が $\partial a / \partial T_1$ 軸と交差するならば非線形運動の振幅は制限され周期的運動を繰り返すと考えられる。ここではこの状態を安定状態であるとする。一方 $C > C_0$ ならば振幅は無限に増幅し不安定であると考えられる。ここで特定の初期条件 ($a = 1, \partial a / \partial T_1 = 0$) について考えるとこの場合の中立波数 K_c は (11) 式より次式となる。

$$K_c = k_c + \varepsilon^2 (\Gamma - \gamma) / \left[2k_c - \frac{\chi}{1+\rho} - \frac{(a_1 - \rho a_2)^2}{4(1+\rho)k_c^2 k'_c} \right] \quad (13)$$

ここに $\gamma = \gamma(U_{10}, U_{20}, \alpha_1, \alpha_2, \rho)$, $\chi = \chi(U_{10}, U_{20}, \rho)$ である。

$\Gamma < 0$ の場合は、定数 C の各場合に対して非線形運動の振幅は制限され安定状態であると考えられる。

(12) 式の場合については、図-4 より $\Gamma > 0$ の場合は定数の各場合に対して不安定状態、 $\Gamma < 0$ の場合は安定状態にあると考えられる。

本節の場合の内部波の挙動は基本的に $a_1 = a_2 = 0$ の場合と同様の挙動を示し、非線形内部波の挙動に関して速度勾配は一定である限り重要な影響は及ぼさないのではないかと考えられる。

5. 参考文献 1) Nayfeh, A.H. & Saric, W.S. : J.F.M. Vol.55, pp311-327, 1972. 2) Drazin, P.G. : J.F.M. Vol.42, pp321-335, 1970.

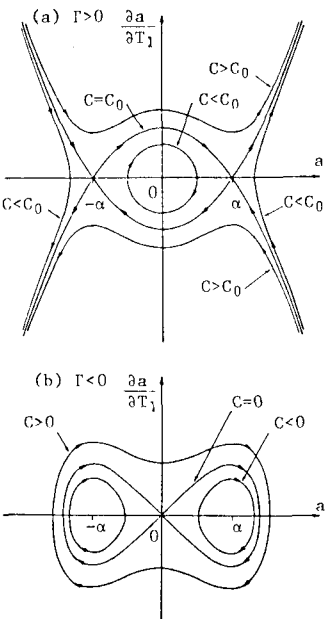


図-3 (11) 式の位相面図

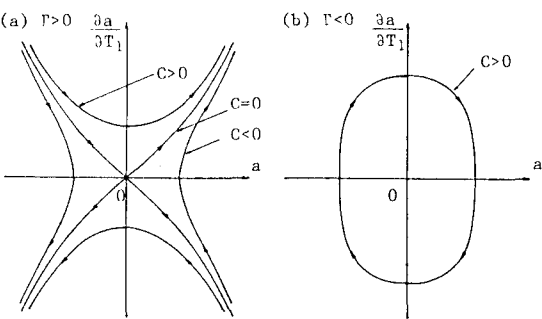


図-4 (12) 式の位相面図