

北海道大学大学院 学生員 水島 敏治
北海道開発局土試 正員 板倉 忠興
北海道大学工学部 正員 岸 力

緒言 開水路合流部のモデルとして、長方形断面を有する主流に対し同じく長方形断面をもった支流がある角度で流入する場合を取上げ、乱流モデルを用いて数値解析を行った。適用したモデルはいわゆる2方程式モデルの中の $k-\varepsilon$ モデル¹⁾であり、計算の結果を実験水路における実測結果との間で比較を行った。

1. 基礎方程式

合流部の概要及び記号を図-1に示す。水理量は水深方向に平均した量とし、現象を2次式として捕える rigid-lid 近似を行う。 h は水深、 $\bar{U}$ 、 $\bar{V}$ はそれぞれ x 、 y 方向の流速で深さ方向の平均値、 τ は乱流せん断応力である。

連続式は(1)式、 x 方向運動方程式は(2)式、 y 方向運動方程式は(3)式、乱れエネルギー方程式は(4)式、乱れ散逸方程式は(5)式の通りである。(7)式、(8)式中の P は深さ方向に平均して取扱うための補正項であり(6)式の関係を用いる。未知量は、 $\bar{U}$ 、 $\bar{V}$ 、 h 、 $\bar{k}$ 、 $\bar{\varepsilon}$ の5個である。以下簡単のため、 $-$ 、 $\sim$ の記号を省略する。

2. 側壁における計算

(1) 側壁での h ：左図の破線の範

図で連続式は

$$\begin{aligned} & V_2 \cdot h(I, 2) \, dx \\ &= \left\{ U(I+1, 1) \cdot h(I+1, 1) + U(I+1, 2) \cdot h(I+1, 2) \right. \\ & \quad \left. - U(I-1, 1) \cdot h(I-1, 1) - U(I-1, 2) \cdot h(I-1, 2) \right\} \frac{dx}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

上式中の U 、 V 、 h は1段階前の値 $(T-1)$ であって、これを充す V_2 を求め、 $V_2(T-1) \equiv V(I, 2)$ とから次式によって h を補正して、計算の結果として採用する値 $h(T+1)$ を得る。ただし、 β は $J=1$ で $\beta=1$ 、対岸 $J=M$ で $\beta=-1$ である。

$$h(T+1) = h(I, 2) + \beta \{ V_2 \cdot |V| - V(T-1) \cdot |V(T-1)| \} \quad (2)$$

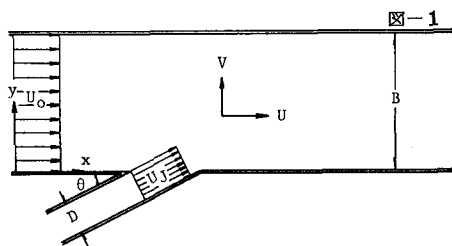
(2) 側壁での U ：側壁では x 方向の運動方程式(2)式を次のように近似する。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho h} = 0 \quad (3)$$

側壁における U を U_w 、 $C_0 U_w = \nu_t(I, J) \{ U(I, J+1) - U(I, J) \}$ として整理し、次式から U_w を得る。

$$\left(-\frac{C_0}{dy} + \frac{C_f}{h} \right) U_w^2 + \frac{\nu_t(I, J+1)}{dy^2} U_w - \frac{\nu_t(I, J+1) U(I, J+1)}{dy^2} = 0 \quad (4)$$

(3) 側壁での k 、 ε ：側壁での値に添字 w を付して k_w 、 ε_w 、 q_w は壁からのある距離として



$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\tau} \frac{x}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\tau} \frac{xy}{\rho} \right) - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{U}\bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}^2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\tau} \frac{xy}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\tau} \frac{yy}{\rho} \right) - g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho h} \quad (3)$$

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = C_f \bar{U} (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\tau_{by}}{\rho} = C_f \bar{V} (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{ij}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, \quad \delta_{ij}: \text{Kronecker's } \delta \text{ function} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{U}\bar{k}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}\bar{k}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{C_\varepsilon} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{C_\varepsilon} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) + G + P_{kv} - \bar{\varepsilon} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{U}\bar{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}\bar{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{C_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{C_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{h} G + P_{\varepsilon v} - C_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \quad (8)$$

$$G = \nu_t \left(2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (9)$$

$$P_{kv} = C_k \frac{U_w^3}{h^3}, \quad P_{\varepsilon v} = C_{\varepsilon} \frac{U_w^4}{h^4}, \quad U_w^2 = C_f (\bar{U}^2 + \bar{V}^2) \quad (10)$$

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{C_f}}, \quad C_{\varepsilon} = 3.6 \frac{C_f}{C_f^2} \quad (11)$$

$$k_n = \frac{C_f (U_n^2 + V_n^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{C_n}}$$

$$E_n = \frac{\{C_f (U_n^2 + V_n^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}{K \eta_n} \quad (5)$$

3. 初期条件と境界条件

初期条件としては、すべての格子点において h 、 U 、 V 、 k 、 E の5つの量を与えておく。また、それらは予想される結果に近い方が望ましい。

上流端 ($I=1$) では U 、 V 、 h を一定の値に固定し、 k 、 E はひとつ下流の断面 ($I=2$) と同じ値を適用する。この断面は合流点より主流幅以上上流側にとる。

下流端 ($I=N$) での5つの変量は常にそれよりひとつ上流の断面 ($I=N-1$) と同じ値を適用し、この断面は合流点より充分下流に位置させる。

4. 数値計算の実行と収束の判定

計算は図-2に示す流れ図に従って実行する。ある変量を Z としたとき次式による。

$$Z(T+1) = Z(T) + \alpha \{Z(T-1) - Z(T)\} \quad (6)$$

ここに、 $Z(T-1)$: 1段階前の値、 $Z(T)$: $Z(T-1)$ の値を基にして演算の結果得られた値、 $Z(T+1)$: 計算の結果として採用する値。

収束の判定は次式により、また各係数には表2の値を適用する。

$$|Z(T-1) - Z(T)| \leq \epsilon' \quad (7)$$

	U	V	h	k	E
ϵ'	0.2cm/sec	0.1cm/sec	0.001cm	—	—
α	0.3	0.6	0.3	0.1	0.01

5. 計算結果の例

図-3のように、幅40cmの主流に対し幅5cmの支流が30°の合流角度で流入する。水路はともに水平であり、流量は $Q_0 = 5.0$ l/sec、 $Q_1 = 0.625$ l/sec、 $Q_1/Q_0 = 1$ である。計算の格子間隔は x 、 y 方向ともに1cmであり、 x 方向には $I=1 \sim 301$ とし支流は $I=50 \sim 60$ へ流入する。諸定数は、

$$C_f = C_b = 0.003, C_m = 0.09, C_1 = 1.43, C_2 = 1.92,$$

$$O_k = 1.0, O_e = 1.3, m = 10.0, \eta_n = 0.5 \text{ cm} \text{ である。}$$

計算は流れ図に従い、まず $h(2,2) \rightarrow h(2,40) \dots \dots h(300,2) \rightarrow h(300,40)$ 、以下 U 、 V 、 k 、 E の順に計算を進める。ただし、 U 、 E では計算を2度繰返す。

図-4は流速をベクトル表示したもので、その位置は矢印の根元である。図-5は U の横断分布を実測値と比較したものである。この場合、計算の繰返し回数は約250回、計算時間は北大大型計算センターのM-200Hで約15分である。尚、この合流条件では合流点下流部に剥離渦を生じないことが確認されている。参考文献：第16回水講、pp.7~12、1972。2) J.F.M.、86-4、pp.761~781、1978。

