

信州大学大学院 学生員 高橋 智嗣
信州大学工学部 正 員 富所 五郎

1. 概要

湖水の風成流は、湖岸形状、水深変化、水温変化、などの諸因子により複雑に変化し、強い三次元性を示す。この三次元解析法として、流れや密度は鉛直方向に連続とおき、三角関数で展開し、Galerkin 有限要素法を用いて解くモデルが提案されている¹⁾。本研究は、このモデルを密度が水平方向に線型に変化する初期条件にある、長方形矩形水路に適用し、三次元解析の可能性を検討する。その後、このモデルを水温が鉛直方向に連続して変化する、つまり連続成層状態にある夏の諏訪湖に適用し、モデルの物理的妥当性の検討を行なうものである。

2. 基礎方程式と有限要素法による定式化

一般に、重力場において密度(水温)が変化する三次元流れに対して Boussinesq 近似が成り立つと考えられる。この時基礎方程式は、総和規約を使て

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + X_i \quad \text{---(1)}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (K_j \frac{\partial T}{\partial x_j}) \quad \text{---(3)}, \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\text{境界条件; 水面 } x_3 = 3 \text{ で } A_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \tau_i, \quad A_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \tau_2, \quad \rho g Cr \cdot K_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = H(T - T_a) \quad \text{---(4)}$$

$$\text{水底 } x_3 = -h \text{ で } u_j = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{---(5)}$$

となる。ここに、 x_i は i 方向座標 ($i=1, 2, 3$) で、ここでは x_1, x_2 を静水面にとり x_1 を東を正に、 x_2 は北を正にまた x_3 はこれらに直角に鉛直上方を正とする。 u_i は i 方向の流速、 P は圧力、 T は水温、 A_j は渦動粘性係数、 K_j は熱の拡散係数、さらに $X_i = \delta_{i1} \cdot f \cdot u_2 - \delta_{i2} \cdot f \cdot u_1 - \delta_{i3} \cdot g \cdot \rho / \rho_0$ である。ここに、 δ_{ij} はクロネッカーの δ 、 f はコリオリ係数、 ρ は水の密度、 ρ_0 は平均水温 T_0 に対応する密度、 τ_i 、 τ_2 は水面に作用する風によるせん断応力を水の密度で除したもの、 Cr は水の比熱、 H は熱量の伝達係数、 T_a は気温、 n の n は法線を意味する。密度 ρ と水温 T の関係は、 $\rho = \rho_0 - \rho_0 \cdot \beta \cdot (T - T_0)$ (β は体積膨張係数) と T が T_0 に対して大きな違いのない時には、線型関係で近似できる。これを(3)式に代入し T を消去して ρ についての基礎式にする。近似関数としては、水平方向の区分的多項式 (N_k) と鉛直方向の余弦関数の積である形状関数を用い流速及び密度を近似している。

つまり

$$u_i = N_k \cdot \cos(A_p \cdot Z) \cdot u_{i,pk}, \quad A_p = \frac{2P-1}{2h} \pi \quad (P=1, 2, \dots, m)$$

$$\rho = N_k \cdot \cos(B_{p'} \cdot Z) \cdot \rho_{p'k}, \quad B_{p'} = \frac{P'-1}{h} \pi \quad (P'=1, 2, \dots, m')$$

$$z = N_k \cdot z_k, \quad (k=1, 2, 3) \quad (\text{図-1 参照})$$

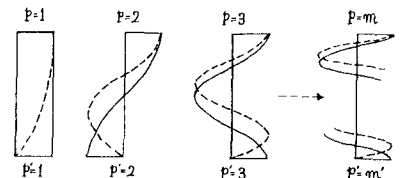


図-1 鉛直方向の形状関数
(点線 $\cos(A_p \cdot Z)$, 実線 $\cos(B_{p'} \cdot Z)$)

ここに、 m, m' は流速、密度の展開項数、 h は三角形一次要素の頂点を示す。つぎに、(1)式に $N_k \cdot \cos(A_p \cdot Z)$ 、(3)式から求めた密度に関する式に $N_k \cdot \cos(B_{p'} \cdot Z)$ 、さらに(2)式を $d \sim z$ の区間で Z 方向に u を消去した z に関する式には N_k を重み関数としてかけ各要素内で積分すると、有限要素法により定式化した式が得られる。しかし、ここでは紙面の都

合上省略する。また、時間積分法としては、Two-step Lax-Wendroff法を用いている。

3. 数値計算結果と考察

幅100m、長さ2000m、水深が5mで一室という長方形矩形水路において、図-2に示す様に水路の左端で密度が1.0右端で1.025。その間は線型に変化する初期条件での、流れによる密度変化を図-3に示す。ここでの密度差は、淡水と海水の密度差に相当しており、風は無いものとしている。図-3の等密度線図により、時間の経過に伴い密度の大きな水が下に潜り込み、水底近くを流れ、密度の小さな水がその逆方向に流れている様子が見られる。ここでは節点数42要素数40、時間きざみ $\Delta t = 5 \text{ sec}$ 、水平渦動粘性係数 $A_1 = A_2 = 6.3 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、慣性項を零と置いた。この結果は、解析解との比較は不可能であるが、物理的には妥当であると考えられたため、このモデルを諏訪湖へ適用した。夏の諏訪湖の水温観測によると、一週間ほど風の無い晴天が続いた後、最高の水温変化が生じ水面で29℃、水底で19℃、その間は線型に変化していた。この状態が風によりどのように崩されるかを調べるため、上の水層で静止状態にある諏訪湖に突然3m/sの南西の風が連続して吹く場合を想定した。節点数141、要素数231、時間きざみ $\Delta t = 20 \text{ sec}$ 、 $A_3 = 2.3 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、 $\tau = 0.13 \text{ cm}^2/\text{sec}$ とし、また水平渦動粘性係数と慣性項を零とした結果を図-4に示す。図-4により湖の中央点では、16000secで初期の密度差の約1/3程度にな、ているが、一様状態になるにはさらに時間がかかるものと思われる。また、風上、風下の岸では完全に一様化し、風上では密度が大に、風下では小になる傾向がある。これは、水面の密度の小さな水が風の吹き寄せにより風下に流れ、水底の密度の大きな水が風上に流れていることを如実に示している。図-5より、MEMを用いて振動周期を求めると風上側で1428sec、風下側で1453secとなり、諏訪湖の固有周期より100secほど長くなっている。以上により、本研究のモデルは物理的な観点からほぼ妥当なものであり、鉛直方向に水温が変化する場合の湖の三次元解析が十分可能であると言える。今後は、鉛直方向の形状関数あるいは渦動粘性係数をより現実的なものに改善すると共に野尻湖などへの適用を図、てゆく。

参考文献

- 1) 富所; 水温変化を考慮した湖水の三次元流動解析法
第3回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集(1981)

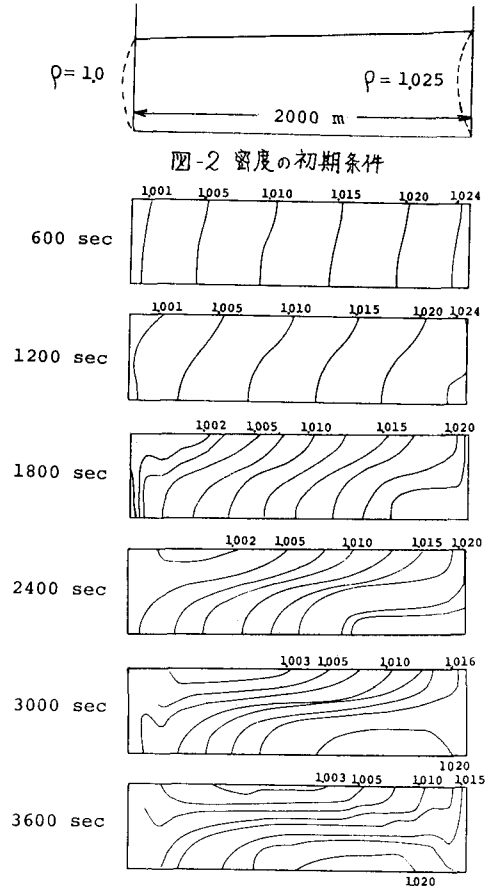


図-2 密度の初期条件

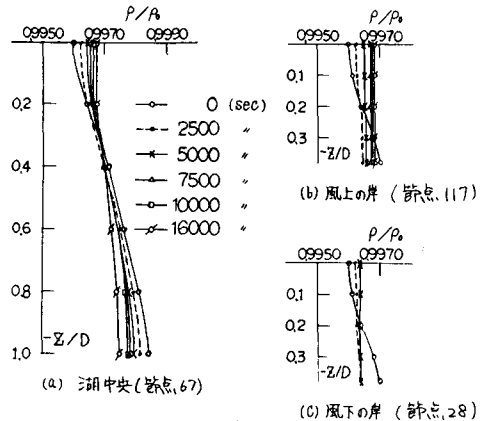


図-3 等密度線図

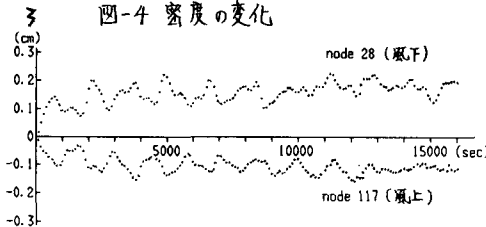


図-4 密度の変化

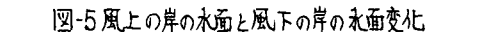


図-5 風上の岸の水面と風下の岸の水面変化