II-176

線形混合補間関数を用いた有限要素法による流れの解析

清水建設大崎研究室　正員　高梨和光

1. はじめに

近年、有限要素法による構造解析が盛んに行われている。特に、境界形状の複雑な問題や、材質の不均質な問題など、従来の方法では取り扱いにくい諸問題を比較的容易に取り扱うことが可能になった。一方、流れの問題に対して、有限要素法による解析が行われているものの、差分法による数値解析が一般的である。これに対し、境界形状の複雑な流れの問題を取り扱う場合には、十分な精度と簡便さを持った有限要素法による流れの解析が必要になると思われる。現在までに、有限要素法による定常流れの解析には、流速に2次関数、圧力に1次関数を用いた混合補間法による解析が、よく用いられている。この方法は、ニュートン·ラプソン法による移流項の計算によって、非圧縮性粘性流体の解析を行うことができる。しかし、移流項の計算に多大の労力と時間を払わなければならないし、高次の関数の取り扱いに非常な不便を感じる。ここでは、流速に区分的1次関数、圧力に1次関数を用いた線形混合補間関数を用いた有限要素法を提案する。これは、今まで用いられていた有限要素法による流れの解析上での問題点を取り除くことができる方法である。

2. 基礎方程式系

運動方程式には、

$$U_j U_{i,j} + \frac{1}{\rho} P_{,i} - \nu\,(U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

を用いる。連続の方程式には、

$$U_{i,i} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

を用いる。本解析で取り扱う流体は、密度が一定のニュートン流体とする。

3. 有限要素法

変分方程式の誘導には、重み付き残差法を用いる。運動方程式の圧力項と粘性項には、部分積分を行う。内挿関数としては、流速に区分的1次関数、圧力に1次関数を用いる。重み関数についても、同様に取り扱うガレルキン法を用いる。このような補間関数の選択を線形混合補間関数と称する。いま、Φ_αを区分的1次関数、Ψ_λを1次関数とすると、

$$U_i = \Phi_\alpha \dot{U}_{\alpha i}\ ,\ P = \Psi_\lambda P_\lambda \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

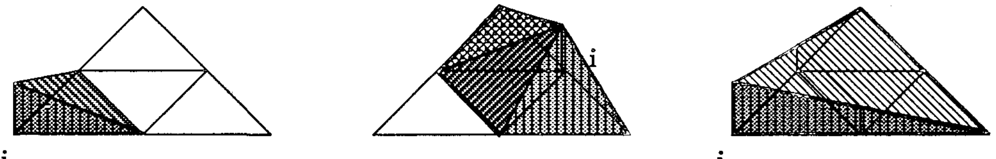
となる。剛性行列の作成は、以下の手順で行う。

(1) 領域を分割して、流速と圧力の形状関数を各小領域の面積座標で表す。

(2) 各小領域で面積座標の積分公式を用いて積分を行う。

(3) 積分することによって得られた各小領域での剛性行列を重ね合わすことにより、大領域での剛性行列を得る。

形状関数は、以下のように設定する。

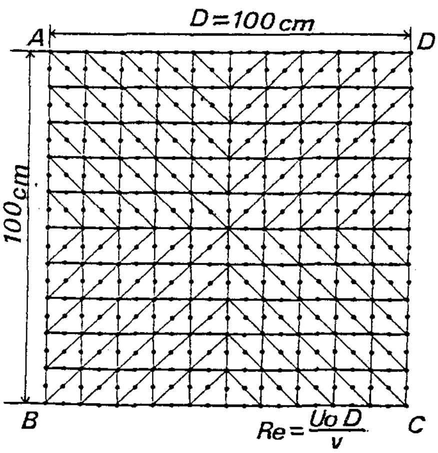


$\Phi_i(i=1,2,3)$　　$\Phi_i(i=4,5,6)$　　$\Psi_i(i=1,2,3)$

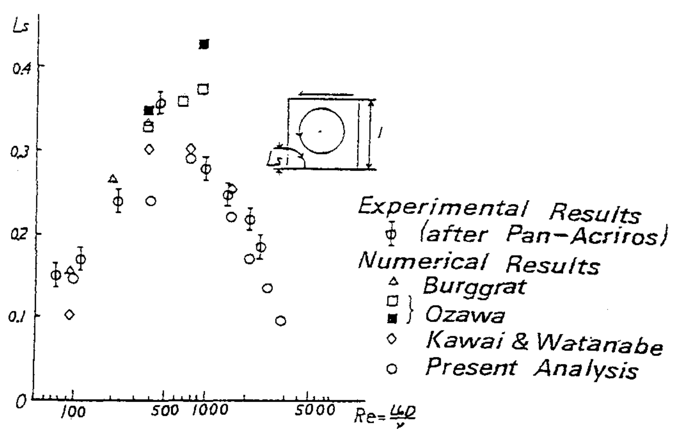
図－1　線形混合補間関数系

4. 数値計算例

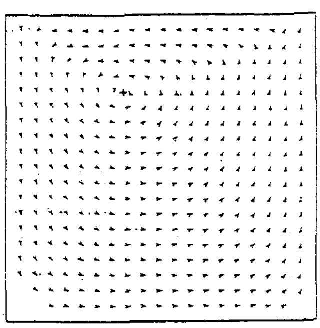
キャビティ·フローの現象の数値計算を行うものとする。100cmの正方形の容器の中に、密度1.0g/cm^3、動粘性係数0.01cm^2/secの流体を入れ、上部を横に動かすものとする。境界条件は、A－B,B－C,とC－D上の法線方向と接線方向の流速を0とし、A－D上の法線方向の流速に0、接線方向の流速にU_0を与えるものとする。図－2は、要素分割図である。図－3は、第2の渦の大きさとレイノルズ数の関係を表したものである。実験値や他の数値計算結果と良い一致をしめしている。図－4から図－6までは、レイノルズ数を上げていった場合の流速分布図である。レイノルズ数を上げていくことにより、左下の第2の渦の大きさが変化していき、新たな第3の渦が右下に生じていることが確認できる。さらに、レイノルズ数を上げていくと、右上に第4の渦が生じる。第2の渦は、やや小さくなり、第3の渦が大きくなっていることがわかる。



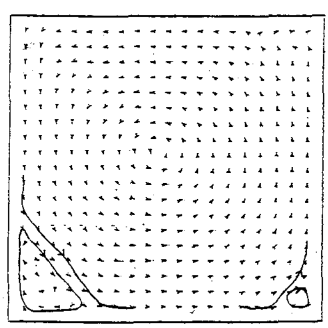
図－2 要素分割図　要素数 200　主節点数 121



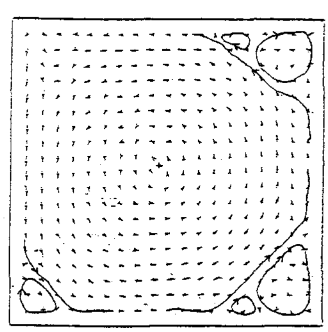
図－3 第2の渦の大きさとレイノルズ数



図－4 流速分布図(Re＝100)



図－5 流速分布図(Re＝800)



図－6 流速分布図(Re＝2800)

1.0cm/sec

5. おわりに

ここで提案した手法により、低レイノルズ数の定常非圧縮性粘性流体の流れの解析が可能となったと考える。特に、多大の労力と時間を省くことができ、従来の方法と同じ精度が保証されていることが確認された。

最後に、本研究を進めるに当たり、御指導いただいた中央大学川原睦人教授に感謝の意を表します。

6. 参考文献

Pironneau,O : Finite elements for flow problems, Simulation Numerique en Mecaninique des Fluides par la Methode des Elements Fins , Nice , vol II, Institut national de Recherche en Informatique et en Automatique , pp385~pp460 ,1980 .