

神戸大学工学部 正 員 松梨 順三郎
 神戸市 正 員 〇中後 豊
 神戸大学大学院 学生員 吉川 雅彦

1. まえがき

有限要素法や差分法などの領域型解法は大容量で高速電子計算機の利用を前提としているが計算機容量や計算時間の制約を受けることが少なくない。特に非定常問題では各時間ステップごとのくり返し計算が不可欠となるため、こうした制約は非常に大きいものとなる。境界要素法は、従来の領域型解法に比べ境界上だけの未知量となるため未知量を激減できる特長を持つ。本研究では境界要素法を適用しその妥当性を検討した。

2. 基礎方程式と定式化

2次元問題として取り扱う。2次元の拡散方程式、境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (1)$$

境界条件は一般に、次の2つの形で与えられる。

$$a) \text{ 基本境界条件 } \Gamma_1 \text{ 上で } c = \bar{c} \quad (2)$$

$$b) \text{ 自然境界条件 } \Gamma_2 \text{ 上で } q = D_x \frac{\partial c}{\partial x} l_x + D_y \frac{\partial c}{\partial y} l_y = \bar{q} \quad (3)$$

ただし $l_x = \cos(n, x)$, $l_y = \cos(n, y)$ とあり n は外向き法線を示す。初期条件

は、 $t=0$ のとき $c=0$ であり全境界は $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ である。(図1参照)

(1)式の移流項は時間ステップを一つずらすことにより既知レベルで評価する。

領域、境界 Γ_1, Γ_2 を含んだ時間、空間方向への重みつき残差の式は次のようになる。

$$\iint_{\Omega} \left\{ D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{\partial c}{\partial t} - \left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right\} c^* d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) c^* d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} (c - \bar{c}) q^* d\Gamma dt \quad (4)$$

ただし $q^* = D_x \frac{\partial c^*}{\partial x} l_x + D_y \frac{\partial c^*}{\partial y} l_y$, c_0 ; 既知レベルの c の値である。

(4)式の左辺中移流項を除いて部分積分を行なうと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \left(D_x \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^2} + \frac{\partial c^*}{\partial t} \right) c d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) c^* d\Omega dt - \left\{ c^* c d\Omega \right\}_{t=0}^{t=\tau} \\ & = \int_0^T \int_{\Gamma} c q^* d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma} q c^* d\Gamma dt \end{aligned} \quad (5)$$

C^* として次式を用いる。

$$c^* = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_x D_y}(\tau-t)} \exp\left\{-\frac{r_0^2}{4(\tau-t)}\right\} \quad r_0^2 = \frac{x^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y} \quad (6)$$

この C^* は基本解と呼ばれる。次の性質がある。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t < \tau \text{ のとき } & D_x \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^2} + \frac{\partial c^*}{\partial t} = 0 \\ t = \tau \text{ のとき } & \int_{\Omega} c^* c d\Omega = c_i \begin{cases} 0 & (r_0 \neq 0) \\ 1 & (r_0 = 0) \end{cases} \quad c_i ; \text{ 負荷点 } i \text{ での } c \text{ の値} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

C, δ は C^*, δ^* に比べて時間変化は緩やかであるため微小時間間隔 Δt では一定であると仮定する。境界要素として線形要素を用いると(6),(7)式より(8)式を得る。

$$k_i c_i + \int_{\Gamma} \int_{t_1}^{t_2} q^* dt d\Gamma = \int_{\Gamma} \int_{t_1}^{t_2} q c^* dt d\Gamma + \left\{ c^* c d\Omega \right\}_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) c^* d\Omega dt \quad (8)$$

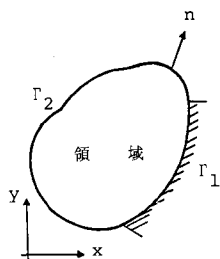


図1 領域と境界

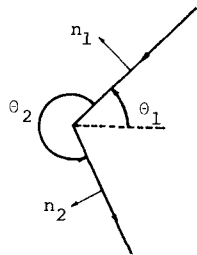


図2 θ の定義

ただし $k_i \begin{cases} 1 & (i \text{ 点 が 内点 のとき}) \\ 1 - \frac{1}{2\pi} (\tan^{-1}(\frac{\sqrt{D_x}}{D_y} \tan \theta_2) - \tan^{-1}(\frac{\sqrt{D_x}}{D_y} \tan \theta_1)) & (i \text{ が 境界 節点 のとき } \theta \text{ は 図 2 参 照}) \end{cases}$
 (8)式を全境界節点について作り全境界節点のC, ϕ を求める。それを用いると内点のCの値が求まる。

3. 沈殿池内物質拡散への適用

図3に適用モデルを示す。流速 u , v については流れをポテンシャル流とみなして解かれた松梨・吉川の計算結果を用いた。モデル内流速分布を図5に示す。メッシュ分割図を図4に示す。境界要素として線形要素, 内部要素として四角形一次要素を用いた。

全境界節点数80, 内点数105である。 D_x, D_y については不明な

点が多くそれぞれ自体, 研究課題でもあるがここでは実験結果等も参考にしつつ $D_x = 0.7 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $D_y = 0.3 \text{ cm}^2/\text{sec}$ とした。また $4t = 20 \text{ sec}$ とした。境界条件は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &: c = 1500 \text{ mg/l} \\ \Gamma_2, \Gamma_4 &: q = 0 \\ \Gamma_3 &: q(t_n) = (D_x \frac{\partial c}{\partial x})_{\Gamma_3} (t_n - 1) \end{aligned}$$

t_n : 未知時間レベル t_{n-1} : 既知時間レベル

初期条件 $t = 0$ のとき $C = 0$

4. 計算結果

図6に計算結果を示す。計算を開始してから数ステップの間は境界 Γ_1 に近い節点で解が不安定となり振動したが, それ以後は安定した解が得られた。円弧状の層状分布をなしており定性的に妥当な結果であると思われる。 $t = 15$ 分以降になると流出の影響がはきりと表われる。境界 Γ_3 では拡散による流出と流速による流出とを考慮している。 t_n レベルでのC, ϕ の値は Γ_3 ではいずれも未知であるが境界条件として必ずC, ϕ のいずれかを与える必要がある。このため時間ステップを一つずらして Γ_3 の境界条件を評価したが安定した解が得られた。移流項を含む拡散方程式は一般に基本解が未知である。このため移流項の評価を時間ステップを一つずらして行ない基本解が既知である方程式系へと変えていた。計算は安定であり解の解析による検証はないが境界要素法の適用性を示すものと考えられる。

参考文献

松梨順三郎, 吉川雅彦, 中後 豊, 境界要素法の拡散解析への適用, 昭和58年度関西支部年次学会講演要

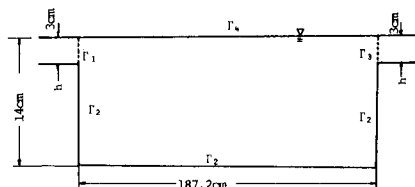


図3 適用領域と境界

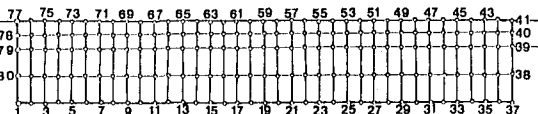


図4 メッシュ分割図

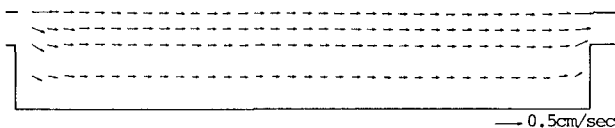


図5 モデル内流況図

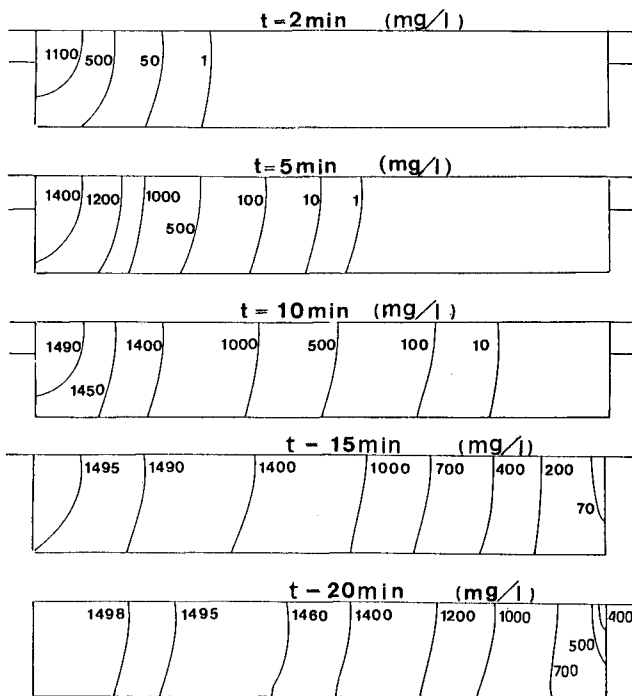


図6 濃度分布