

中央大学 学生員 ○富田 敦紀  
中央大学 正 員 川原 睦人

## 1. はじめに

本報告は、任意形状構造物による波の回折散乱現象と境界要素法と有限要素法を結合させて定式化したものである。波の散乱現象を扱う際に問題となるのは、無限遠方での放射条件の取扱である。そこで、本手法においては、領域を外部領域と内部領域に分割し、外部領域に関しては、放射条件を満足する様な関数を用いて境界要素法により離散化し、内部領域に関しては、有限要素法を用いて離散化する。そこで各々の境界面に関して接続して、全領域について解析を行う手法を用いる。

## 2. 基礎方程式

任意形状の物体が水中に固定されていると考える。領域は図1に示す通り境界要素領域 $\Omega_E$ と有限要素領域 $\Omega_F$ とに分割する。また構造物境界を $\Gamma_A$ 、境界要素領域と有限要素領域における境界を $\Gamma_B$ 、無限遠方における境界を $\Gamma_C$ とする。

波を微小振幅波と仮定すると、その運動は速度ポテンシャルにより記述される。そこでこれを入射波ポテンシャル $\phi_{in}$ と、散乱波ポテンシャル $\phi_{sc}$ の和と考える。 $(\phi = \phi_{in} + \phi_{sc})$  従って、支配方程式と境界条件は次の様になる。

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega_F + \Omega_E) \quad (1)$$

$$\phi_{,n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma_A) \quad (2)$$

$$\phi_{sc,n} - ik\phi_{sc} = 0 \quad (\text{on } \Gamma_C) \quad (3)$$

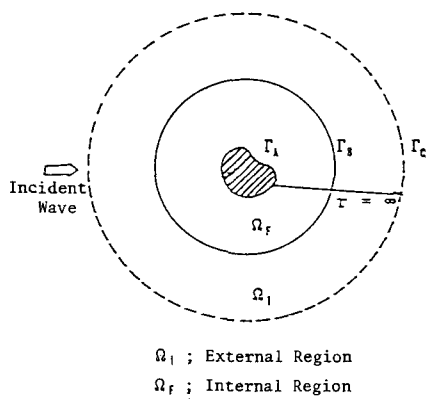


図1. 領域平面図

ここで、 $k$ は波数、 $(\cdot)_{,n}$ は法線方向微係数を表す。また、 $\Gamma_B$ における釣合条件と平衡条件は、有限要素領域におけるポテンシャルを $\phi^F$ とし、境界要素領域におけるポテンシャルを $\phi^E$ とすると次の様になる。

$$\phi^F = \phi^E (\equiv \phi_{in} + \phi_{sc}) \quad (\text{on } \Gamma_B) \quad (4)$$

$$\phi_{,n}^F = \phi_{,n}^E (\equiv \phi_{in,n} + \phi_{sc,n}) \quad (\text{on } \Gamma_B) \quad (5)$$

## 3. 解析手法

(i) 変分原理の導入 ; 全領域での支配方程式と境界条件を満足する等価な汎関数は、次の様になる。

$$\Pi(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \{ (\nabla \phi)^2 - (k\phi)^2 \} d\Omega_F + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_B} \phi \phi_{,n} d\Gamma_B - \int_{\Gamma_A} \phi \hat{\phi}_{,n} d\Gamma_A \quad (6)$$

ここで、上式を導く過程で、入射波 $\phi_{in}$ は既にヘルムホルツの方程式を満足していることを用いた。なお入射波 $\phi_{in}$ は、波の振幅を $a$ とし、入射角を $\theta_0$ とすると次の様に表わされる。

$$\phi_{in} = a \exp \{ ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0) \} \quad (7)$$

(ii) 内部領域のモデル化 ; 構造物近傍における内部領域は、通常の有限要素を用いて離散化する。

(iii) 外部領域のモデル化 ; グリーンの定理の第二形式を用いて直接法における境界要素を用いて離散化し、基本解としては、ヘルムホルツ方程式の特異解である0次第一種ハンケル関数を用いる。また特異点の処理を考慮することによって、領域 $\Omega_B$ 及び境界 $\Gamma_B$ における境界要素方程式は、それぞれ次の様に変形出来る。

$$\phi_{sc}(P) = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_B} \{ \phi_{sc}(H_0^{(0)}(kr)),_n - H_0^{(0)}(kr) \cdot \phi_{sc,n} \} d\Gamma_B \quad (8)$$

$$\phi_{sc}(P) = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_B} \{ \phi_{sc}(H_0^{(0)}(kr)),_n - H_0^{(0)}(kr) \phi_{sc,n} \} d\Gamma_B + \frac{1}{2} \phi_{sc}(P) \quad (9)$$

ここで、 $i$ は虚数を表わし、 $P$ はソース・ポイント、 $r$ はソース・ポイントからの距離を表わす。

(iv)境界要素と有限要素の結合 ; (9)式において  $\phi_{sc}$ ,  $\phi_{s,n}$ を補間関数によって離散化し、未知節点量( $\bar{\phi}$ ,  $\bar{\phi}_n$ )とする。また、境界  $\Gamma_0$  の釣合条件と平衡条件により次の様に変換出来る。

$$\bar{\phi}_n = -A\bar{\phi} + A\hat{\phi}_n - \hat{\phi}_{n,n} \quad (10)$$

ここで、 $A$ は境界要素方程式の  $\bar{\phi}_{s,n}$ に関して変換した影響係数マトリックスである。これより汎関数(6)式の右辺第3項は次の様になる。

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \phi \phi_{,n} d\Gamma_0 = \bar{\phi} \left\{ -\frac{1}{2} A \int_{\Gamma_0} N^T N d\Gamma_0 \bar{\phi} + A \int_{\Gamma_0} N^T d\Gamma_0 \hat{\phi}_n - \int_{\Gamma_0} N^T d\Gamma_0 \hat{\phi}_{n,n} \right\} \quad (11)$$

従って、(11)式を(5)式に代入し、(5)式を停留にするポテンシャル関数  $\bar{\phi}$  を見出すことは支配方程式、及び境界条件を満足する解と等価である。従って、最終的な方程式は、次の様になる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\phi}} = [K + H] \bar{\phi} - F = 0$$

$$K = \int_{\Gamma_F} \{ (\nabla N)^T (\nabla N) - \rho^2 N^T N \} d\Omega_F$$

$$H = -A \int_{\Gamma_0} N^T N d\Gamma_0$$

$$F = A \int_{\Gamma_0} N^T \hat{\phi}_{n,n} d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} N^T \hat{\phi}_{n,n} d\Gamma_0$$

#### 4. 数値計算例

(i) 本解析手法の妥当性の検討 ; 固定円柱に作用する回折係数、水面変動量、及び円柱近傍の波高分布を計算し、フーリエ・ベッセル展開法を用いた MacCamy and Fuchs の解を厳密解として比較を行う。これらは共に水深一定、振幅1.0の場合における結果である。図2、図3は、それぞれ波数1.0及び波数2.0の入射波が矢印の方向から入射した場合における円柱壁面での水面変動量、回折係数の値を比較したものである。実線で示されているのが厳密解である。両者は共によく一致しているのがわかる。

図4は、波数1.0の入射波が矢印の方向から入射した場合の円柱近傍の波高分布を示している。破線で示されているのが厳密解である。

(ii) 2本円柱近傍の波高分布 ; 円柱間隔を  $2.0L$  ( $L$ ; 波長)とし、円柱径を  $L/4$  としこの波高分布を図5に示す。

#### 5. 終わりに

構造物周辺では、一般に水深が変化するのが常である。この様状状態を取り入れる為には、有限要素法が有利であり、無限遠の条件を考えると境界要素法が有利であると考えられる。また有限要素領域の要素分割によって計算精度が大きく左右される。

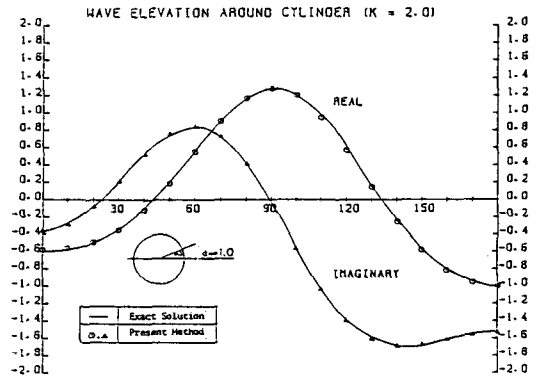


図2. 円柱壁面の水面変動量

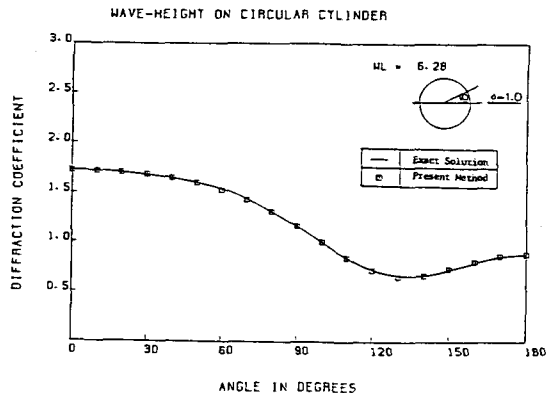


図3. 円柱壁面の回折係数

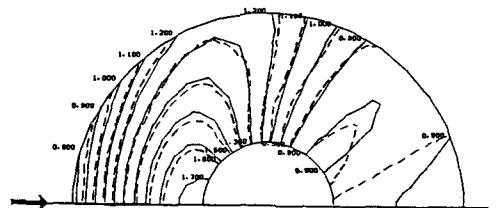


図4. 単円柱近傍の波高分布

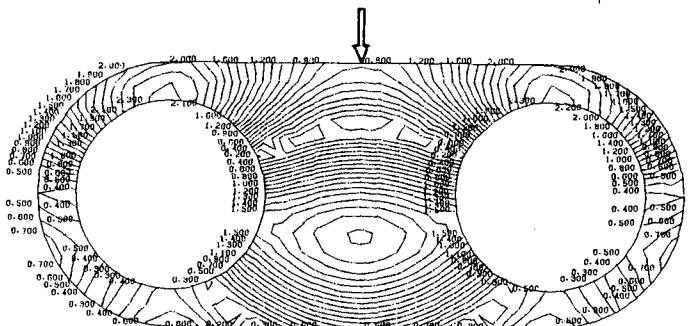


図5. 2本円柱近傍の波高分布