

中央大学 学生員 櫻山 和男
中央大学 正 員 川原 睦人

1. はじめに

波動の解析は、従来より、差分法や有限要素法などによって数値的に行なわれている。この場合、解決すべき問題点が多々残されているが、そのうちの一つに分割数の問題がある。一般に、一つの波を表現するためには、分割する節点が10点ぐらい必要であるとされている。このため、実際の海域を解析する場合には、非常に多くの節点数を必要とし、現行のコンピュータでは実用にならない場合が多い。

本報告は、この問題点を解決する一解法としての有限要素法を提案するものである。この方法は、補間多項式として、あらかじめ基礎方程式の解を満足する式を用いる有限要素法である。

2. 基礎方程式

一般に、定常表面波の基礎方程式は、ヘルムホルツ方程式で表わされる。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

ここで、 ϕ は二次元のポテンシャル関数、 k は波数である。

境界条件としては、ポテンシャル関数 ϕ 、および境界に対して外向き法線方向の ϕ の微分値 ϕ_n が導入される。

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } S_1 \quad (2) \quad \phi_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{\phi}_n \quad \text{on } S_2 \quad (3)$$

ここで、 S_1, S_2 はそれぞれ ϕ, ϕ_n が与えられる境界を表わし、 $\hat{}$ はその既知量を表わす。また、 $S_1 \cup S_2 = S$ (全境界)、 $S_1 \cap S_2 = \phi$ とする。

3. 変分原理

未知のポテンシャル関数 ϕ を求めるために、基礎方程式と境界条件式とに等価な汎関数を導入する。

$$\pi_P = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \phi)^2 dV - \frac{1}{2} \int_V k^2 \phi^2 dV - \int_{S_1} \phi \hat{\phi}_n dS \quad (4)$$

(4)式の右辺第一項を部分積分すると、次式のようになる。

$$\pi_P = \frac{1}{2} \int_S \phi \phi_n dS - \frac{1}{2} \int_V \phi (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) dV - \int_{S_2} \phi \hat{\phi}_n dS \quad (5)$$

ここで、(1)式の解を満足する補間多項式を用いると、(5)式の右辺第二項は自動的に零となり、次式のようになる。

$$\pi_P = \frac{1}{2} \int_S \phi \phi_n dS - \int_{S_2} \phi \hat{\phi}_n dS \quad (6)$$

汎関数(6)式を停留にするポテンシャル関数 ϕ を、境界条件式(2)のもとに見つけることが、基礎方程式(1)を境界条件式(2)、(3)のもとに解くことに相当する。

4. 有限要素法

ここでは、図-1に示すような4節点4角形要素を用い、補間多項式としては、基礎方程式の解を満足する次式を用いる。

$$\phi = \alpha_1 \cos \frac{\pi}{12} x \cos \frac{\pi}{12} y + \alpha_2 \cos \frac{\pi}{12} x \sin \frac{\pi}{12} y + \alpha_3 \sin \frac{\pi}{12} x \cos \frac{\pi}{12} y + \alpha_4 \sin \frac{\pi}{12} x \sin \frac{\pi}{12} y \quad (7)$$

ここで、 $\alpha_1 \sim \alpha_4$ は一般化座標、 x, y は要素内の任意の座標である。

節点条件を、(7)式に代入すると、次式を得る。

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = [B] \{\alpha\} \quad (8)$$

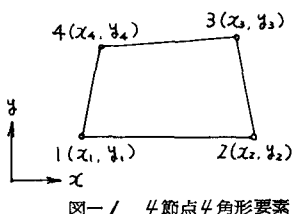


図-1 4節点4角形要素

また、 ϕ, ϕ_n を次のように書き表わす。

$$\phi = [A][\alpha], \quad \phi_n = [C][\alpha] \quad (9)$$

(8)式を用いて、(9)式を書きかえると次のようになる。

$$\phi = [A][B]^{-1}[\tilde{\phi}], \quad \phi_n = [C][B]^{-1}[\tilde{\phi}] \quad (10)$$

(10)式を汎関数(6)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{1}{2} \int_S \phi \phi_n dS - \int_{S_2} \phi \hat{\phi}_n dS \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{\phi}]^T [B]^{-T} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_S [A]^T [C] dS + \int_S [C]^T [A] dS \right) [B]^{-1} [\tilde{\phi}] - [\tilde{\phi}]^T [B]^{-T} \int_{S_2} [A] [\hat{\phi}_n] dS \right\} \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{\phi}]^T [K] [\tilde{\phi}] - [\tilde{\phi}]^T [F] \end{aligned} \quad (11)$$

汎関数(11)を停留にする ϕ は、次式から求められる。

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \tilde{\phi}} = [K][\tilde{\phi}] - [F] = 0 \quad (12)$$

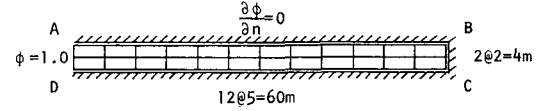


図-2 要素分割図と境界条件

ここで、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $[F]$ は荷重ベクトルである。

本手法の特徴は、要素内を解析解で満足する関数で近似していること。および、積分の計算がすべて要素境界上の線積分となることにある。

5. 数値計算例

本手法の妥当性を検証するために、図-2に示す有限要素分割と境界条件のもとに、解が振動のモードとなる波数を用いて計算を行った。4次モードの場合の計算結果が図-3に示されている。図中で、実線で示されているのが理論値、○印で示されているのが、本手法による計算値である。また、▲印で示されているのが、従来より用いられている4節点4角形要素による計算値である（この場合、停留にすべき汎関数は(4)式である）。図より、本手法による計算値は、従来の方法による計算値よりも、はるかに精度がよいことがわかる。より定量的に議論するために、解析誤差の指標として、次の値をとる。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}{n}} / X_{\max} \quad (13)$$

ここで、 X_i は理論値、 x_i は計算値であり、 $X_{\max}$ は理論値の最大値である。この指標を用いて、計算精度を比較したものが図-4である。なお、横軸にはx方向のメッシュ幅 δ と波長 L との比(δ/L)をとっている。以上の結果から、次のことが結論される。

- 1) 本手法による解は、従来の有限要素解よりもかなり精度がよく、波長が短くなるほど、その差は顕著になる。
- 2) 従来の有限要素解と同じ解析誤差を許容するならば、本手法では、節点数を半分に減らすことができる。

6. おわりに

本手法は、従来の有限要素法より少ない節点でも、実用上十分な精度が得られるため、解の精度はもちろんなこと、計算機容量、計算時間の点でかなりの向上が図られると思われる。

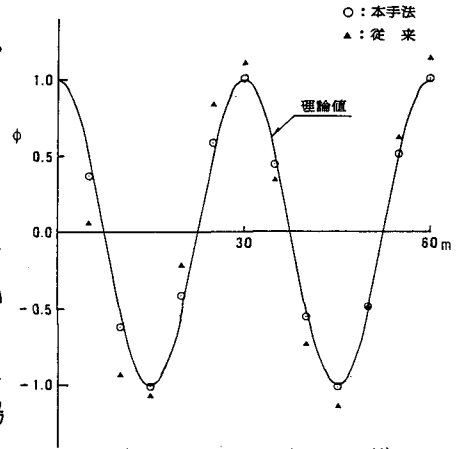


図-3 計算結果(4次モード)

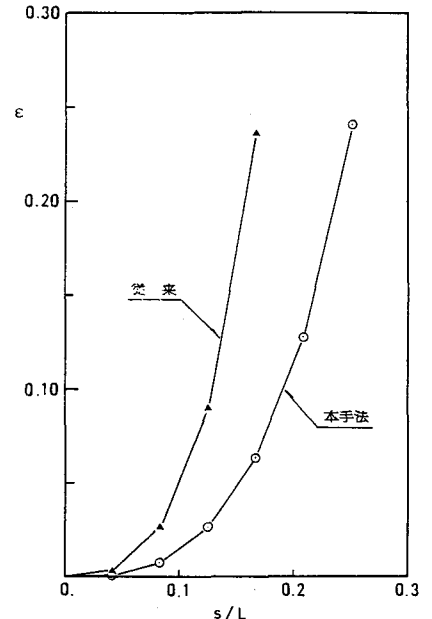


図-4 解析誤差の比較