

信州大学工学部 正 員 寒川 典昭

" " 荒木 正夫

信州大学大学院 学生員 寺島 彰

1. はじめに

MEP分布とは、与えられた制約条件の下で情報エントロピーを最大にする分布である。我々¹⁾は、今まで1変数MEP分布について考察し、実測データに対する適合度を検討してきた。本稿では、これを拡張して、変数 x, y からなる相互エントロピーを最大にする分布、すなわち2変数MEP分布を評価する。さらに、この分布をモーメントとの関連において検討し、採用するモーメントの数と適合度との関係を明らかにする。

2. 理論式の構成とパラメタの評価法

x, y の同時確率密度関数を $P(x, y)$ とすると、相互エントロピー $H(X, Y)$ は次式で与えられる。

$$H(X, Y) = -\int_0^\infty \int_0^\infty p(x, y) \ln p(x, y) dx dy \quad \dots (2.1)$$

又、我々が x, y に関して知り得る情報を次の形で取り入れる。

$$\int_0^\infty \int_0^\infty p(x, y) dx dy = 1 \quad \dots (2.2) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty x^a p(x, y) dx dy = a^{\mu_x} \quad \dots (2.3)$$

 $a=1, 2, \dots, N_a$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y^b p(x, y) dx dy = b^{\mu_y} \quad \dots (2.4) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty x^c y^d p(x, y) dx dy = c^{\mu_x} d^{\mu_y} \quad \dots (2.5)$$

 $b=1, 2, \dots, N_b$ $c=1, 2, \dots, N_c, d=1, 2, \dots, N_d$

(2.2)~(2.5) 式を制約条件として(2.1)式を最大にする $P(x, y)$ を求めることは、与えられた情報はモーメントの形で取り入れ、それ以外は x, y がランダムに発生する分布を求めていることである。言い換えると、このことは、情報の与え方には主観が入るが、それ以外はできるだけ客観的な分布、すなわち相互エントロピーを最大にする分布を求めていることになる。我々は、水文事象のようなデータの少ない自然現象の説明に、このような分布を採用することは妥当と考える。そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法で解くと最大エントロピー推定値(2変数MEP分布) $\hat{p}(x, y)$ は次のようになる。

$$\hat{p}(x, y) = \exp\left(-\alpha - \sum_{a=1}^{N_a} \beta_a x^a - \sum_{b=1}^{N_b} \gamma_b y^b - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{d=1}^{N_d} \delta_{cd} x^c y^d\right) \quad \dots (2.6)$$

ここで、 $\alpha, \beta_a, \gamma_b, \delta_{cd}$ はラグランジュ乗数である。いま、 $\beta_a, \gamma_b, \delta_{cd}$ の近似値を $\beta_a^0, \gamma_b^0, \delta_{cd}^0$ 、残差を $\epsilon_a^{\beta}, \epsilon_b^{\gamma}, \epsilon_{cd}^{\delta}$ とおくと、

$$\beta_a = \beta_a^0 + \epsilon_a^{\beta}, \quad \gamma_b = \gamma_b^0 + \epsilon_b^{\gamma}, \quad \delta_{cd} = \delta_{cd}^0 + \epsilon_{cd}^{\delta} \quad \dots (2.7)$$

となり、これを(2.3)~(2.5)式に代入して線形化すると次式が得られる。

$$\sum_{a=1}^{N_a} (z_{i+a, 0}^{-i \mu_x} z_{a, 0}) \epsilon_a^{\beta} + \sum_{b=1}^{N_b} (z_{i, b}^{-i \mu_x} z_{0, b}) \epsilon_b^{\gamma} + \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{d=1}^{N_d} (z_{i+c, d}^{-i \mu_x} z_{c, d}) \epsilon_{cd}^{\delta} = z_{i, 0}^{-i \mu_x} z_{0, 0} \quad i=1, 2, \dots, N_a \quad \dots (2.8)$$

$$\sum_{a=1}^{N_a} (z_{a, j}^{-j \mu_y} z_{a, 0}) \epsilon_a^{\beta} + \sum_{b=1}^{N_b} (z_{0, j+b}^{-j \mu_y} z_{0, b}) \epsilon_b^{\gamma} + \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{d=1}^{N_d} (z_{c, j+d}^{-j \mu_y} z_{c, d}) \epsilon_{cd}^{\delta} = z_{0, j}^{-j \mu_y} z_{0, 0} \quad j=1, 2, \dots, N_b \quad \dots (2.9)$$

$$\sum_{a=1}^{N_a} (z_{k+a, l}^{-k \mu_x} z_{a, 0}) \epsilon_a^{\beta} + \sum_{b=1}^{N_b} (z_{k, l+b}^{-k \mu_x} z_{0, b}) \epsilon_b^{\gamma} + \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{d=1}^{N_d} (z_{k+c, l+d}^{-k \mu_x} z_{c, d}) \epsilon_{cd}^{\delta} = z_{k, l}^{-k \mu_x} z_{0, 0} \quad k=1, 2, \dots, N_c, l=1, 2, \dots, N_d \quad \dots (2.10)$$

ここで

$$z_{i, j} = \int_0^\infty \int_0^\infty x^i y^j \exp\left(-\sum_{a=1}^{N_a} \beta_a^0 x^a - \sum_{b=1}^{N_b} \gamma_b^0 y^b - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{d=1}^{N_d} \delta_{cd}^0 x^c y^d\right) dx dy$$

具体的に、次の順序で計算する。

1) $\beta_a^0, \gamma_b^0, \delta_{cd}^0$ を仮定する。2) (2.8)~(2.10)式の連立方程式を $\epsilon_a^{\beta}, \epsilon_b^{\gamma}, \epsilon_{cd}^{\delta}$ に関して解く。3) 求めた $\epsilon_a^{\beta}, \epsilon_b^{\gamma}, \epsilon_{cd}^{\delta}$ を(2.7)式に代入して $\beta_a, \gamma_b, \delta_{cd}$ を計算し、これを次の近似値とみなす。4) 2), 3)

を $\epsilon_a^\beta, \epsilon_b^\gamma, \epsilon_{cd}^\delta$ が微小となるまで繰り返す。

3. 適合度の計数例と安定性

1 例として、次式で与えられる 2 変数ガンマ分布を母集団と仮定する。

$$P(x,y)=\frac{1}{\Gamma(v)(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{v+1}{2}}}\frac{v-1}{2(1-\rho)}\frac{v-1}{2}\exp\left\{-\frac{x}{\sigma_1(1-\rho)}-\frac{y}{\sigma_2(1-\rho)}\right\} \\ \star(xy)^{\frac{v-1}{2}}I_{v-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{xy}\right) \quad \dots (3.1)$$

ここで、1 次モーメントによって基準化されたモーメントすなわち、 $a_x^m = a_x^{\mu} / (1^{\mu}_x)^a$ 、 $b_y^m = b_y^{\mu} / (1^{\mu}_y)^b$ 、 $cd^{m_{xy}} = cd^{m_{xy}} / \{(1^{\mu}_x)^c(1^{\mu}_y)^d\}$ を用い、2 変数 M E P 分布によって適合させる。計算にあたって、 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 、 $1^{\mu}_x=1^{\mu}_y(=v\sigma)=1$ とした。表-1 はこのときのラグランジュ乗数を、図-1 は適合度分布を示したものである。ここで、 $2G(q,r)$ は、(3.1) 式で $v=q$ 、 $\rho=r$ とした分布、 $2G(s,t,u,v)$ は $Na=s$ 、 $Nb=t$ 、 $Nc=u$ 、 $Nd=v$ とした 2 変数 M E P 分布である。

いくつかの計算例から、 $2G(4,4,2,2)$ は母集団の形をよく記述できることが明らかになった。一方、図-2 は (3.1) 式を母集団としてデータを発生させ、モーメントを計算して求めた 2 変数 M E P 分布である。データが、 x 、 y それぞれ 70 個の場合には、母集団よりとがった分布となっているが、データ数の増加とともに、M E P 分布は母集団に近づいてくることが予想される。このことについては、講演時に示す。又、モーメントの安定性とデータ数との関係を (3.1) 式を母集団としてシミュレーションにより検討した。その結果、明確ではないが、データ数が 60～80 個付近から、モーメントの平均が真値に近づき、標準偏差が小さくなっていく様子がみられた。

4. あとがき

本研究では、2 変数 M E P 分布の構成を議論し、その分布の特徴を (3.1) 式を母集団として考察した。その結果、2 変数 M E P 分布の評価法が示され、 $2G(4,4,2,2)$ は母集団をよく記述できることが明らかになった。今後、モーメントのもつ誤差が 2 変数 M E P 分布に及ぼす影響を感度分析を介して検討するとともに、2 変数 M E P 分布の存在条件、情報の与え方と M E P 分布の関係、実測データへの適用、多変数への拡張等を検討したいと考えている。

表-1 ラグランジュ乗数

(a) $2G(2,0.5)$

	$2G(2,2,1,1)$	$2G(4,4,1,1)$	$2G(4,4,2,2)$
α	0.57084	1.6852	1.2734
$\beta_1(=Y_1)$	0.14688	-2.0921	-1.5278
$\beta_2(=Y_2)$	0.77881	2.8953	3.2772
$\beta_3(=Y_3)$	—	-0.70465	-0.89304
$\beta_4(=Y_4)$	—	0.06828	0.077565
δ_{11}	-1.1866	-1.0480	-2.9656
δ_{12}	—	—	0.40641
δ_{21}	—	—	0.40641
δ_{22}	—	—	-0.067129

(b) $2G(4,0.5)$

	$2G(2,2,1,1)$	$2G(4,4,1,1)$	$2G(4,4,2,2)$
α	2.1283	5.3627	4.5707
$\beta_1(=Y_1)$	-1.8801	-8.3625	-7.2592
$\beta_2(=Y_2)$	2.3276	9.7708	10.475
$\beta_3(=Y_3)$	2. —	-3.1215	-3.6144
$\beta_4(=Y_4)$	—	0.39584	0.42859
δ_{11}	-2.6116	-2.3235	-6.3267
δ_{12}	—	—	1.0551
δ_{21}	—	—	1.0551
δ_{22}	—	—	0.22084

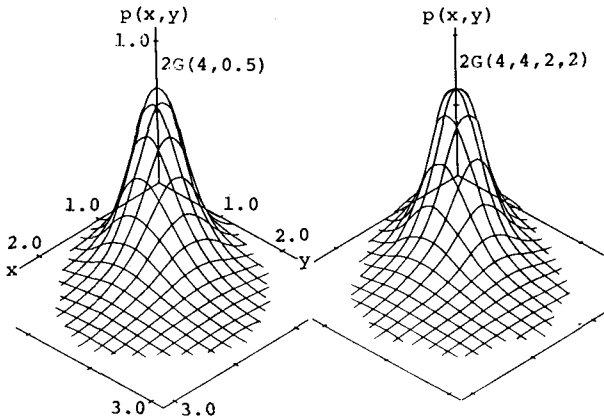


図-1 母集団と適合度分布の比較

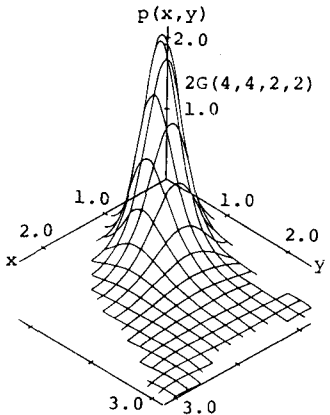


図-2 シミュレーション分布 (母集団： $2G(4,0.5)$ ，データ数： $x=70$ ， $y=70$ 個の場合)

1) 寒川，荒木，甲田：降水頻度分析への M E P の導入について，第 39 回土木学会年講，昭和 57 年 10 月。