

日本大学工学部 正 員 安 田 禎 輔

まづがき 主な母数推定法には積率法、最尤法、図式推定法などがあるが、実用的方法としては石原・高瀬による積率法、岩井による岩井法・同修正法などがある。積率法はマイコンやポケコンの普及した今日にもかかわらず数表や図表を必要とし、また岩井法・同修正法は順序統計量の両端から順に全標本の10~20%の標本を取り母数 θ を推定する方法であり、この母数は必ずしも全データを代表するものではない。

本報においては、これらの点を考慮し河川計画・水文・気象の各分野で使用されている3母数対数正規分布の母数推定に関する2, 3の手法を試みた。一つはヒストグラムなどから容易に最大値が推定できる場合の手法で、他の一つは計算結果に個人差が入り込まないように人為的操作や仮定を最小限にとどめ全標本から母数を推定する方法である。

1. 3母数対数正規分布

図-1は3母数対数正規分布の模式図である。

この分布の確率密度関数は次式となる。

$$g(x) = \frac{\log e}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x-b} e^{-\frac{1}{2\theta_0^2} (\log \frac{x-b}{\alpha_0-b})^2}$$

ここで

$$\bar{x} = \log(x-b) = \log(\alpha_0-b) \quad (1)$$

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (\log \frac{x-b}{\alpha_0-b})^2} \quad (2)$$

であり、 α_0 は分布 $g(x)$ の中央値であり、 θ_0 は正規分布 $f(z)$ の標準偏差である。また、分布 $g(x)$ の最頻値 x_m 、最大値 $g(x_m)$ および母数 θ は次式となる。

$$x_m = (\alpha_0-b) \cdot 10^{-\theta_0^2 / \log e} + b \quad (3)$$

$$g(x_m) = \frac{\log e}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \frac{10^{(\theta_0^2 / \log e)}}{\alpha_0-b} e^{-\frac{1}{2}(\theta_0 / \log e)^2} \quad (4)$$

$$b = x_m - \frac{\log e}{\theta_0 \sqrt{2\pi} g(x_m)} e^{-\frac{1}{2}(\theta_0 / \log e)^2} \quad (5)$$

2. 岩井法と修正岩井法

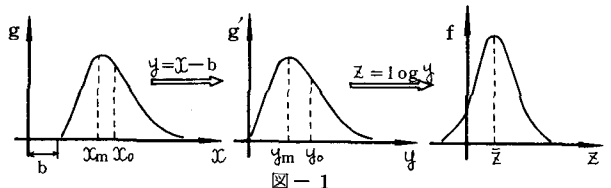
岩井法は対数正規分布を変数変換して標準正規分布に変換した場合、原点から順序統計量の両端から同順位の数までの距離が相等しいと仮定し、中央値 α_0 を近似的に

$$\log \alpha_0 = \sum \log x / n \quad (6)$$

として、全標本の10~20%の標本より母数

$$b = \frac{x_4 x_5 - \alpha_0^2}{(x_4 + x_5) - 2\alpha_0} \quad (7)$$

を求めている。



岩井法に関し2, 3の考察を行うと、次のような疑問点を列記することができる。

1) 標本は完全に対数正規分布に従うことはあり得なく両端部ほど乱れるので、端部のみを標本から計算される母数 θ は相当にはらつく恐れがある。

2) 中央値 α_0 の推定に(6)式を採用しているが、理論的には(2)式によるべきである。

3) 母数 θ は10~20%の標本から推定されるので、必ずしも全標本を代表するものではない。

4) 3)の点を是正しようとして中央付近の標本まで採用し標本数を増やしても(8)式の性質により中央付近の標本に対しては計算できない。なぜならば(8)式の分母・分子が中央付近で0に近づくため、標本のわずかな乱れが計算結果に大きく影響したり矛盾が生じたりする。修正岩井法は、角屋によって2)の欠点を改良されたものであるが、しかし依然としてその他の点は改良されず、また、この計算法は収束速度が遅い。

3. 最大値法

標本またはヒストグラムなどから容易に最大値 $g(x_m)$ (他の特性値 α_0 , x_m などより比較的容易で直感的に推定できる)が推定できる場合の手法を以下に提案する。

計算順序に従って計算式を示す。

$$x_0 = 10^{\frac{1}{n} \sum \log(x-b)} + b \quad \text{----- (9)}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (\log \frac{x-b}{x_0-b})^2} \quad \text{----- (10)}$$

$$x_m = (x_0 - b) \cdot 10^{-\sigma_0^2 / \log e} + b \quad \text{----- (11)}$$

$$b = x_m - \frac{1}{2 \sqrt{\pi} \cdot g(x_m) e^{\frac{1}{2}}} \quad \text{----- (12)}$$

となる。ここで、

$$t = (\sigma_0 / \log e)^2 / 2$$

あり、式(9)~(12)

は式(2), (3), (4)

および式(6)である。

計算手順を流図

で示せば図-2 となる。

この方法は最大

値を推定しなければ

ならぬという欠点

があるが、ヒストグ

ラムなどから容易に

推定できる場合には、

有効である。

4. 図心法

図心法はこれまで

述べてきた諸法の欠

点を取り除き計算結

果に個人差が入り込

まないように人為的

操作と誘導推定を最

小限にとどめ

全標本から母数を推

定する方法であり、

しかも本法は

端部を重視する場合

には端部の標本から、

中央部を重視する

場合には中央付近の

標本から母数を推定

できる

など融通性もある。

頻度図を変数変換

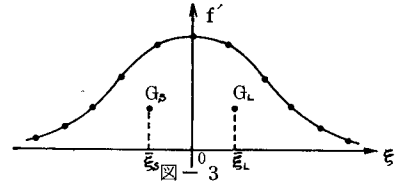
$$\xi = \frac{1}{\sigma_0} \log \frac{x-b}{x_0-b} \quad \text{----- (13)}$$

よって標準正規分布 $N(0, 1)$ に近似できれば変換

された図は左右対称とみなせるから

$$\bar{\xi}_L = -\bar{\xi}_S \quad \text{----- (14)}$$

となる。



また、原点の左右にある標本の個数は左右ほぼ同数となるはずであるから、これを N_S, N_L とすれば、(14)式より(15)式が得られる。

$$\bar{\xi}_{L,S} = \frac{1}{n_{L,S} \sigma_0} \sum_{i=1}^{n_{L,S}} \log \frac{x_{L,S} - b}{x_0 - b} \quad \text{----- (15)}$$

ここで、標本を両端より順に同数値 ($n' = n_S = n_L$) ずつ取れば、(14)式と(15)式より(16)式となる。

$$\sum_{L,S=1}^{n'} \log(x_L - b)(x_S - b) - 2n' \log(x_0 - b) = 0 \quad \text{--- (16)}$$

$$L + S = n + 1$$

$$f(b) = \sum_{L,S=1}^{n'} \log(x_L - b)(x_S - b) - 2n' \log(x_0 - b) \quad \text{--- (17)}$$

$$f(b) = -\frac{1}{\ln 10} \left\{ \sum_{L=1}^{n'} \frac{1}{x_L - b} + \sum_{S=1}^{n'} \frac{1}{x_S - b} - \frac{2n'}{x_0 - b} \right\}$$

$$\text{----- (18)}$$

さらに、(17)式とよき、

(16)式をNewton法により

解き、 b を求めれば、その

他の母数 x_0, σ_0 などには

(9), (10) 式より求められる。

図-4 は本法の計算手順

を流図で示したものであ

り、 $f'(b)$ は(18)式で示さ

れる。

図-4 は本法の計算手順

を流図で示したものであ

り、 $f'(b)$ は(18)式で示さ

れる。

図-4 は本法の計算手順

を流図で示したものであ

り、 $f'(b)$ は(18)式で示さ

れる。

図-4 は本法の計算手順

を流図で示したものであ

り、 $f'(b)$ は(18)式で示さ

れる。

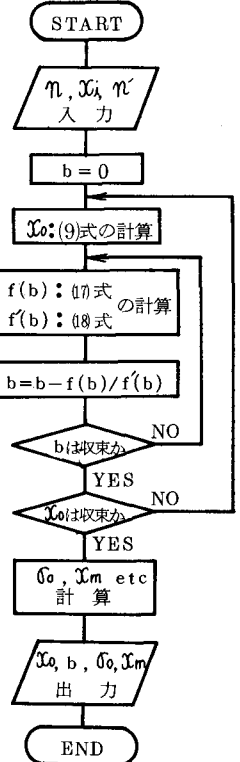


図-4

<参考文献>

1) 安田 稯輔：二つのピークを持つ度数分布の統計的処理，土木学会年講，1981

2) 安田 稯輔：二つの対数正規分布の合成標本の統計処理，土木学会年講，1982

3) 安田 稯輔：3母数対数正規分布の母数推定法に関する提案，日大理工，工学部学術研究報告会概要集，1982