II-44　　貯留型流出モデルの確率応答について

北海道大学工学部　学生員　角　浩美
同　上　正員　藤田　睦博
同　上　正員　山岡　勲

1．はじめに

降雨量の観測値から変換系を通じて流出量を求める流出問題において、降雨量に含まれる誤差が、変換系を通過する際にどのように伝播していくかその程度を知ることは、流出解析上不可欠な課題である。本研究では、変換系には確率的に変動する成分がないものとして、降雨量に含まれる確率的変動成分が変換系を通過する際どのように伝播するかを検討してみた。降雨量に含まれる雑音成分として、独立な白色雑音の場合についてはすでに報告しているので[1]、今回は単純な自己相関構造をもつ雑音成分を扱うものとする。また変換系としては、藤田[2]の貯留関数法を用いるものとする。

2．基礎式

Kinematic Wave理論より誘導した藤田の貯留方程式を式(1)に示す。これらの諸量は無次元量であるので、次元のある量とは式(2)の関係がある。一方、Bras[3]は、ベキ乗型の確率変数 $S(T)^m$ を式(3)のように展開している。式(3)の α,β は定数で式(4)で与えられる。但し S は正規性の雑音である。またBrasの式には適用限界があり、藤田[1]は $V(T)\leqq 0.4$ の範囲で成立することを報告している。式(1)，(3)より $\bar{S}(T)$ $\tilde{S}(T)$ に関する微分方程式が式(5)，(6)で与えられる。式(6)の β を時間 T の関数として、初期条件 0 のもとに $\tilde{S}(T)$ を求め自乗平均をとると、貯留量の分散に関する式(8)が求まる。本研究では R が単純な自己相関構造をもつ場合を検討しているので、それを表す確率特性として式(9)を与える。結局、式(8)，(9)より貯留量の分散に関する微分方程式が式(10)として得られる。ここで β は $\bar{S}(T)$ を含むので、式(5)，(10)を連立微分方程式として解き、平均値 $\bar{S}$，分散 σ_S^2 を求めることになる。一方、流量 Q の平均，分散は、式(1)，(3)より式(11)，(12)で与えられる。なお、式(4)で α,β を第一項(n＝1)まで採用したとき第一近似解(添字1を付す)と呼び、第二項(n＝2)まで採用したとき第二近似解(添字2を付す)と呼ぶことにする。
降雨の平均値 $\bar{R}$ としては、平均値一定のときと平均値が時間的に変化するときを考え、それぞれ式(13)，(14)で与えるものとする。

$$\frac{dS}{dT}=R-Q \;,\quad S=KQ^{1/m} \;,\quad K=\frac{m}{m+1} \tag{1}$$

S,R,T は無次元の貯留量、降雨量、時間

$$s=s_*\cdot S \;,\; r=r_*\cdot R \;,\; t=t_*\cdot T \;,\; q=q_*\cdot Q$$
$$s_*=y_*\cdot x_* \;,\quad r_*=\bar{r} \;,\quad t_*=(\bar{l}\,\bar{r}^{1-m}/a)^{1/m} \tag{2}$$
$$y_*=t_*\cdot\bar{r} \;,\quad x_*=\bar{l}$$

$\bar{l}$：平均斜面長　$\bar{r}$：平均降雨強度　a,m：斜面定数

$$S(T)^m=\alpha\bar{S}(T)+\beta\tilde{S}(T) \tag{3}$$

$\tilde{S}(T)$ は平均値からの偏差

$$E[S(T)]=\bar{S}(T)\;,\; E[\tilde{S}(T)^2]=\sigma_S^2$$
$$\alpha=\bar{S}(T)^{m-1}\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=0}^{2k-1}(m-i)\prod_{j=1}^{k}(2j-1)V(T)^{2k}/(2k)!\}$$
$$\beta=\bar{S}(T)^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0}^{2k-2}(m-i)\prod_{j=1}^{k}(2j-1)V(T)^{2k-2}/(2k-1)! \tag{4}$$
$$V(T)=\sigma_S(T)/\bar{S}(T)$$

$$\frac{d\bar{S}(T)}{dT}=\bar{R}(T)-\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\bar{S}(T) \tag{5}$$

$\bar{R}(T)$ は $R(T)$ の平均値

$$\frac{d\tilde{S}(T)}{dT}=\tilde{R}(T)-\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\tilde{S}(T) \tag{6}$$

$\tilde{R}(T)$ は平均値からの偏差

$$\tilde{S}(T)=exp\{-\int(\tfrac{1}{K})^m\beta dT\}\int exp\{\int(\tfrac{1}{K})^m\beta d\tau\}\tilde{R}(\tau)d\tau \tag{7}$$

$$E[\tilde{S}(T)^2]=exp\{-2\int(\tfrac{1}{K})^m\beta dT\}\iint exp\{\int(\tfrac{1}{K})^m\beta d\tau_1\}\cdot exp\{\int(\tfrac{1}{K})^m\beta d\tau_2\}E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2 \tag{8}$$

$$E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)]=\sigma_R^2 exp\{-\varepsilon|\tau_1-\tau_2|\}\;,\quad E[\tilde{R}(T)^2]=\sigma_R^2 \tag{9}$$

σ_R^2 は降雨の分散　ε は定数

$$\frac{d}{dT}\left[\frac{d\sigma_S^2(T)}{dT}+2(\tfrac{1}{K})^m\beta\sigma_S^2(T)\right]+\{(\tfrac{1}{K})^m\beta+\varepsilon\}\left[\frac{d\sigma_S^2(T)}{dT}+2(\tfrac{1}{K})^m\beta\sigma_S^2(T)\right]=2\sigma_R^2 \tag{10}$$

$$\bar{Q}(T)=E\{(\tfrac{1}{K})^m S(T)^m\}=(\tfrac{1}{K})^m\alpha\bar{S}(T) \tag{11}$$

$$\sigma_Q^2(T)=(\tfrac{1}{K})^{2m}\beta^2\sigma_S^2(T) \tag{12}$$

$$E[R(T)]=1 \tag{13}$$

$$E\{R(T)\}=R_0+R_1\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{T}{T_a}\right)\quad(0<T<T_R) \tag{14}$$

R_0,R_1：定数　T_a：降雨ピーク時刻　T_R：降雨継続時間

3．シミュレーション法

微分方程式の誘導過程におけるBrasの仮定を実証するため微分方程式より得られる解をシミュレーション法により確めてみた。シミュレーションの手順としては、式(1)の $R(T)$ に平均 $\bar{R}$，分散 σ_R^2 の特定の性質をもつ乱数を与えて、初期条件 0 のもとに $S(T)$ を求め、式(1)より $Q(T)$ を計算した。このような計算を300例求めて時刻 T のアンサンブル平均として $S(T),Q(T)$ の平均，分散を求めた。なお、数値計算にあたって次の点に留意しなければならない。

いま、ΔT 毎に式(1)を数値計算しようとすると離散化された降雨量 R_m は、連続関数表示の降雨量 $R(T)$ と式(15)の関係がある。式(15)より R_m の平均および分散は、式(16),(17)で与えられる。すなわち、分散が $\varepsilon\Delta T$ の関数となっているため、数値計算の際にはこの点を考慮する必要がある。一方、R_m の自己相関関数は、式(18)で与えられるので式(9)を用いて式(19)が得られる。式(19)を子細に検討してみると、$\rho_{|m-n|}$ はもはや単純な相関構造をしていないことがわかる。ここでは式(20)に示すP次の自己回帰モデルを採用した。これは、式(18)の自己相関構造をもつ系列を近似するものである。

$$R_m = \frac{1}{\Delta T}\int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} R(\tau)d\tau \tag{15}$$

$$E\{R_m\} = \frac{1}{\Delta T}\int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} E\{R(\tau)\}d\tau = \bar{R} \tag{16}$$

$$V\{R_m\} = \sigma_{R'}^2 = \frac{2\sigma_R^2}{\varepsilon\Delta T}\left[1-\frac{1}{\varepsilon\Delta T}\{1-exp(-\varepsilon\Delta T)\}\right] \tag{17}$$

$$\rho_{|m-n|} = \frac{1}{\sigma_{R'}^2\Delta T^2}\int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T}\int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} E\{R(\tau_1)-1\}\{R(\tau_2)-1\}d\tau_1 d\tau_2 \tag{18}$$

$$\rho_{|m-n|} = \frac{1}{2\{\varepsilon\Delta T-1+exp(-\varepsilon\Delta T)\}}\left\{exp\left(\frac{\varepsilon\Delta T}{2}\right)-exp\left(-\frac{\varepsilon\Delta T}{2}\right)\right\}^2 \cdot exp\{-|m-n|\varepsilon\Delta T\} \tag{19}$$

$$\tilde{R}_T = \phi_1\tilde{R}_{T-1} + \phi_2\tilde{R}_{T-2} + \cdots\cdots + \phi_P\tilde{R}_{T-P} + N_T \tag{20}$$

$\tilde{R}_T$：降雨の平均値からの偏差　ϕ_i：自己回帰係数　N_T：白色雑音

$E\{R_T\} = 0$　,　$E\{N_T\} = 0$

図-1,2は、式(11),(12)の流量の平均,分散の第一近似値とシミュレーション値を比較したものである。但し、図-1は降雨の平均値が一定のとき($\Delta T=0.05$)、図-2は平均値がsine曲線のとき($R_0=1, R_1=0.5, T_\alpha=2, T_R=4$, $\Delta T=0.05$)である。また R_m の自己回帰モデルの次数をP=3としている。いずれの場合も、シミュレーション値と式(11),(12)の理論式は、よく適合している。

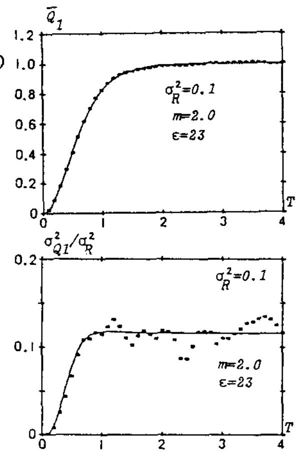

図-1

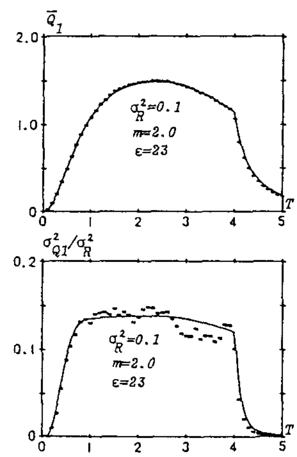

図-2

4．応答特性

図-3,4は、$\bar{R}=1$ の場合と $\bar{R}$ がsine曲線の場合とで、$\sigma_R^2=0.1$ として、第一近似解によって $\bar{Q}$, σ_Q^2 を計算したものである。$\bar{Q}$ に関して、両者ともmの値が大きくなると立ち上がりが急になっている。σ_Q^2 に関してはいずれも、T=1(無次元到達時間)以降一定値となることがわかる。また平均値が変動する図-4の σ_Q^2 は、平均値が一定のときよりも大きな値をとっており、$R(T)$ の平均値関数が σ_Q^2 にかなり影響を及ぼしていることがわかる。

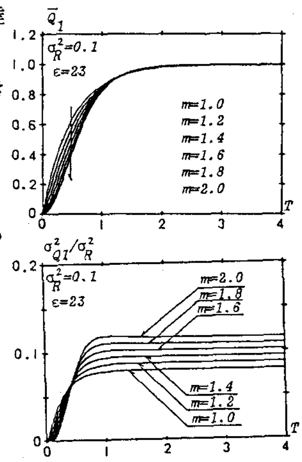

図-3

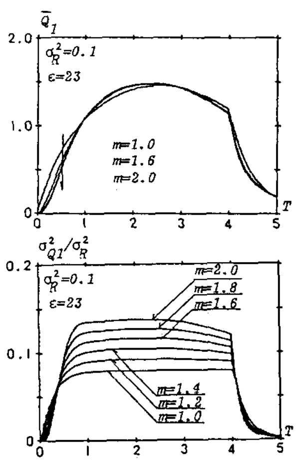

図-4

なお、本論文の諸量は、全て無次元表示になっているので、流量の平均,分散に関して次元のある量との関係式は次のようになる。

$$\bar{q} = l\,\bar{r}\,\bar{Q}$$

$$\sigma_q^2 = l^2\,\bar{r}^2\,\sigma_Q^2$$

本論文は、文部省科学研究費総合A(代表　林泰造)の援助を受けた。記して謝意を表する。

1) 藤田睦博,道口敏幸,羽山芳則：貯留型流出モデルの確率応答,土木学会第36回年講Ⅱ,1981

2) 藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究,土木学会論文報告集,第314号,1981

3) Bras,R.L. and Georgekakos,K.P.: Real time non-linear filtering techniques in stream-flow forecasting, A statistical linearlization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, 1980

4) 藤田睦博,山岡勲,角浩美：貯留型流出モデルの確率応答に関する研究,道支部論文集第39号Ⅱ,1983